Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Juni 2016

Mathematik

Kompensationsprüfung 1
Angabe für **Prüfer/innen**

BM BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

öffentliches Dokument

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

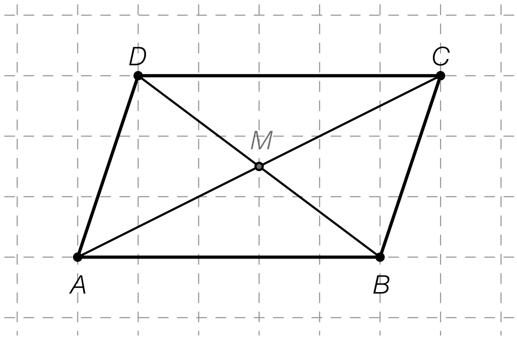
	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

öffentliches Dokument

Aufgabe 1

Vektoren

Die nachstehende Abbildung zeigt ein Parallelogramm *ABCD* mit dem Diagonalenschnittpunkt *M*.



Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch ist/sind!
Begründen Sie Ihre Antwort jeweils anhand der Abbildung!

I. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

II. $A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = C$

III. $\overrightarrow{AD} + 2 \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

Leitfrage:

In physikalischen Kontexten können Geschwindigkeiten mithilfe von Vektoren dargestellt werden. Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_1$ beschreibt die geradlinige Bewegung eines Objekts. Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_2$ beschreibt die geradlinige Bewegung eines zweiten Objekts.

Deuten Sie die nachstehend angeführten Zusammenhänge sowohl geometrisch als auch im Hinblick auf die Bewegung der Objekte!

I. $2 \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 0$

II. Die Länge des Vektors $\vec{v}_1$ ist halb so groß wie die des Vektors $\vec{v}_2$.

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 1

Vektoren

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

I. Die Gleichung ist falsch, da die beiden Vektoren keinen rechten Winkel einschließen.

II. Die Gleichung ist richtig, da ausgehend vom Punkt A die Addition der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ den Punkt C ergibt und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ gilt.

III. Die Gleichung ist richtig, da $2 \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DB}$ gilt.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wahrheitsgehalt aller drei Aussagen richtig angegeben und (anhand der Abbildung veranschaulicht) erklärt/begründet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

I. Die beiden Vektoren sind parallel. $\vec{v}_2$ ist doppelt so lang wie $\vec{v}_1$ und hat die entgegengesetzte Orientierung.
Das bedeutet, dass sich das zweite Objekt doppelt so schnell wie das erste Objekt und entgegengesetzt orientiert bewegt.

II. $\vec{v}_2$ ist wieder doppelt so lang wie $\vec{v}_1$, allerdings kann im Gegensatz zur ersten Gleichung nichts über die Richtung der beiden Vektoren, d. h. über die Richtungen der Bewegungen, ausgesagt werden.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Zusammenhänge sowohl geometrisch als auch im gegebenen Kontext richtig gedeutet werden. Die geometrische Deutung kann auch anhand einer Skizze erfolgen.

öffentliches Dokument

Aufgabe 2

Sportaktivitäten

In einem Betrieb gibt es a Personen, die Sport betreiben, und b Personen, die das nicht tun. Die Anzahl der Frauen im Betrieb ist c. Von allen Personen im Betrieb, die Sport betreiben, sind d männlich.

Aufgabenstellung:

Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle durch entsprechende Terme mithilfe der gegebenen Variablen!

	Personen, die Sport betreiben	Personen, die keinen Sport betreiben
Männer	d	
Frauen		

Leitfrage:

Drei Personen des Betriebes werden zufällig ausgewählt. Stellen Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit auf, dass diese drei Personen keinen Sport betreiben, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 2

Sportaktivitäten

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

	Personen, die Sport betreiben	Personen, die keinen Sport betreiben
Männer	d	$b - (c - a + d)$
Frauen	$a - d$	$c - (a - d)$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Tabelle korrekt vervollständigt wird.
Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$\frac{b}{a+b} \cdot \frac{b-1}{a+b-1} \cdot \frac{b-2}{a+b-2}$$

Mögliche Erklärung der Vorgehensweise:
Die vorliegende Situation entspricht einem dreimaligen „Ziehen ohne Zurücklegen“.
Dadurch verringert sich bei jedem Zug sowohl die Anzahl der Personen, die keinen Sport betreiben (b), als auch die Anzahl der Personen insgesamt ($a + b$) jeweils um 1.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der gesuchte Term korrekt aufgestellt und die Vorgehensweise schlüssig erklärt wird.
Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

öffentliches Dokument

Aufgabe 3

Zeit – Geschwindigkeit

Der Geschwindigkeitsverlauf eines PKW kann im Beobachtungszeitraum [0 s; 5 s] annähernd durch eine quadratische Funktion v mit $v(t) = b \cdot t^2 + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}$ modelliert werden. Dabei wird t in Sekunden (s) und $v(t)$ in Metern pro Sekunde (m/s) angegeben.

Aufgabenstellung:

Zum Zeitpunkt $t = 3$ beträgt die Geschwindigkeit 13,6 m/s und zum Zeitpunkt $t = 5$ beträgt die Geschwindigkeit 20 m/s.

Ermitteln Sie die Gleichung der Geschwindigkeitsfunktion v für diesen Beobachtungszeitraum und deuten Sie den Wert des Parameters c im gegebenen Kontext!

$v(t)$ = ____

Leitfrage:

Bestimmen Sie die Länge des Wegstücks s, das der PKW (in diesem Beobachtungszeitraum) bis zum Erreichen einer Geschwindigkeit von $v = 15$ m/s zurücklegt, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 3

Zeit – Geschwindigkeit

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Aus $v(3) = 13{,}6$ und $v(5) = 20$ folgt:

$9 \cdot b + c = 13{,}6$
$25 \cdot b + c = 20 \;\Rightarrow\; b = 0{,}4;\ c = 10$

$v(t) = 0{,}4 \cdot t^2 + 10$

Der Wert des Parameters c gibt die Geschwindigkeit zu Beginn des Beobachtungszeitraums ($t = 0$) an.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Gleichung der Geschwindigkeitsfunktion v angegeben und der Wert des Parameters c (sinngemäß) korrekt gedeutet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$15 = 0{,}4 \cdot t^2 + 10 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{12{,}5}$

$$s = \int_0^{\sqrt{12{,}5}} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{12{,}5}} (0{,}4 \cdot t^2 + 10)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{0{,}4 \cdot t^3}{3} + 10 \cdot t\right)\Bigg|_0^{\sqrt{12{,}5}}$$

$s \approx 41{,}25$ m

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Länge des Wegstücks korrekt ermittelt und die Vorgehensweise schlüssig erklärt wird.

öffentliches Dokument

Aufgabe 4

Funktionseigenschaften – Krümmung

Gegeben ist eine allgemeine Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$).

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, in welchem Intervall der Graph der Funktion f mit den Parametern $a = 1$, $b = -6$, $c = 0$ und $d = 1$ linksgekrümmt ist! Erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Ermitteln Sie die zweite Ableitung der allgemeinen Polynomfunktion f und lösen Sie dann die beiden folgenden Teilaufgaben!

Begründen Sie, warum die Krümmung des Graphen von f nicht von den Parametern c und d abhängt!
Begründen Sie, warum der Graph der Funktion f immer zwei verschiedene Krümmungsbereiche aufweist!

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 4

Funktionseigenschaften – Krümmung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$
$f'(x) = 3x^2 - 12x$
$f''(x) = 6x - 12$

An der Wendestelle ändert der Funktionsgraph sein Krümmungsverhalten.

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; 6x - 12 = 0 \;\Rightarrow\; x = 2 \\ f'''(2) = 6 \neq 0 \end{array}\right\} \; x = 2 \text{ ist die Wendestelle}$$

Da z. B. $f''(3) = 6 > 0$ gilt, ist der Graph von f im Intervall $[2; \infty)$ linksgekrümmt.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Bereich korrekt angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird. Die Angabe eines offenen oder halboffenen Intervalls bzw. einer Ungleichungskette ist ebenfalls als richtig zu werten.

Eine grafische Ermittlung des gesuchten Intervalls einschließlich der Argumentation, dass es nur einen Wendepunkt gibt, ist ebenfalls als richtig zu werten.
Der Nachweis $f'''(2) \neq 0$ muss nicht erbracht werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$f''(x) = 6a \cdot x + 2b$

Da die Krümmungsbereiche mithilfe der zweiten Ableitung ermittelt werden und in der Gleichung von f'' die Parameter c und d nicht vorkommen, ist die Krümmung von den Parametern c und d unabhängig.

Die Übergangsstelle zwischen den beiden Krümmungsbereichen ist die Wendestelle x_W. Da die Wendestelle als Nullstelle der linearen Funktion f'' ermittelt werden kann und diese für $a \neq 0$ jedenfalls existiert, gibt es zwei Krümmungsbereiche: Linkskrümmung, wenn $f''(x) > 0$ gilt, bzw. Rechtskrümmung, wenn $f''(x) < 0$ gilt.

Lösungsschlüssel:

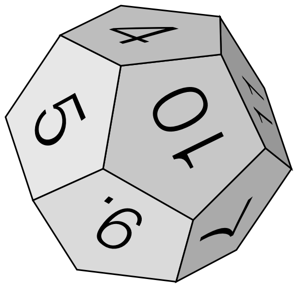
Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die zweite Ableitung korrekt ermittelt wird und wenn die Unabhängigkeit der Krümmung von den Parametern c und d und die Existenz der beiden verschiedenen Krümmungsbereiche (sinngemäß) korrekt begründet werden.

öffentliches Dokument

Aufgabe 5

Dodekaeder

Ein Dodekaeder ist ein Körper mit 12 Flächen. Ein regelmäßiger Dodekaeder, dessen Flächen gleich groß sind und der mit den Zahlen von 1 bis 12 beschriftet ist, wird für Zufallsexperimente verwendet. Die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, ist dabei für alle Seitenflächen gleich groß.



Aufgabenstellung:

Jemand wirft diesen Dodekaeder einmal und möchte eine Zahl würfeln, die durch 3 teilbar ist. Geben Sie den Grundraum *G* und die entsprechende Ereignismenge *E* dieses Zufallsexperiments an!

G = ____

E = ____

Leitfrage:

Bei einem Spiel wird der Dodekaeder zweimal hintereinander geworfen. Der Spieler gewinnt, wenn die Summe der geworfenen Zahlen 6 ergibt.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler gewinnt, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

öffentliches Dokument

Lösung zur Aufgabe 5

Dodekaeder

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ *oder verbal:* die Zahlen von 1 bis 12

$E = \{3, 6, 9, 12\}$ *oder verbal:* die Zahlen 3, 6, 9, 12

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl der Grundraum als auch die Ereignismenge verbal oder formal richtig angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Es gibt fünf günstige Versuchsausgänge: (1, 5) und (5, 1), (3, 3), (2, 4) und (4, 2).

Die Wahrscheinlichkeit beträgt demnach $5 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{144} \approx 0{,}03472 = 3{,}472\ \%$.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit korrekt angegeben und erklärt wird.

öffentliches Dokument