

Name:	
Klasse/Jahrgang:	



Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reife- und Diplomprüfung

BHS

11. Mai 2015

Angewandte Mathematik

Teil A



Hinweise zur Aufgabenbearbeitung

Das vorliegende Aufgabenheft (Teil A) enthält fünf Aufgaben mit unterschiedlich vielen Teilaufgaben. Die Teilaufgaben sind unabhängig voneinander bearbeitbar.

Verwenden Sie für die Bearbeitung einen nicht radierbaren, blau oder schwarz schreibenden Stift.

Verwenden Sie für die Bearbeitung ausschließlich das Aufgabenheft und die Ihnen zur Verfügung gestellten Antwortblätter. Schreiben Sie auf der ersten Seite des Aufgabenheftes Ihren Namen in das dafür vorgesehene Feld und auf jedes Antwortblatt Ihren Schülercode. Geben Sie bei der Beantwortung jeder Teilaufgabe deren Bezeichnung an.

In die Beurteilung wird alles einbezogen, was nicht durchgestrichen ist. Streichen Sie Notizen durch.

Die Verwendung eines durch die Schulbuchaktion approbierten Formelheftes und elektronischer Hilfsmittel (grafikfähige Taschenrechner oder andere entsprechende Technologie) ist erlaubt, sofern keine Kommunikation nach außen getragen werden kann und keine Eigendaten in die elektronischen Hilfsmittel implementiert sind. Handbücher zu den elektronischen Hilfsmitteln sind in der Original-Druckversion oder in im elektronischen Hilfsmittel integrierter Form zulässig.

Abzugeben sind das Aufgabenheft und alle von Ihnen verwendeten Antwortblätter.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

Farbenfrohe Gummibären

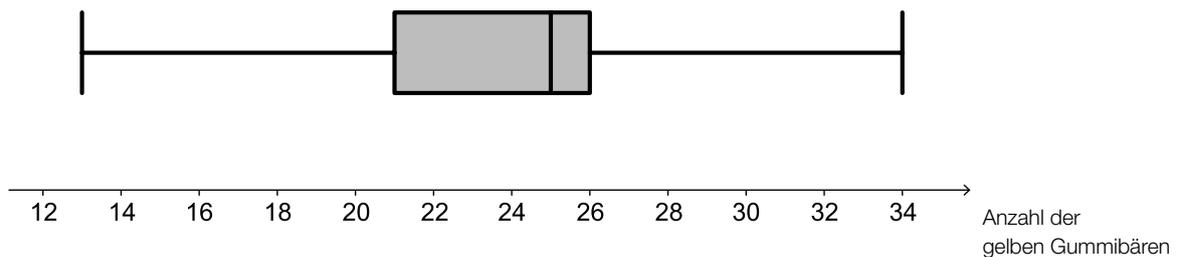
Gummibären werden in 5 unterschiedlichen Farben bzw. 6 unterschiedlichen Geschmacksrichtungen hergestellt: rot (Himbeere und Erdbeere), gelb (Zitrone), grün (Apfel), orange (Orange) und weiß (Ananas).

- a) Die nachstehende Tabelle enthält eine Auflistung, wie viele weiße Gummibären in den untersuchten Packungen waren.

Anzahl weißer Gummibären	17	20	21	22	24
Anzahl der Packungen	2	3	3	1	4

- Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Anzahlen weißer Gummibären pro Packung.
[1 Punkt]

- b) Mehrere Packungen wurden hinsichtlich der Anzahl der gelben Gummibären pro Packung untersucht. Das Ergebnis dieser Untersuchung ist im nachstehenden Boxplot dargestellt.

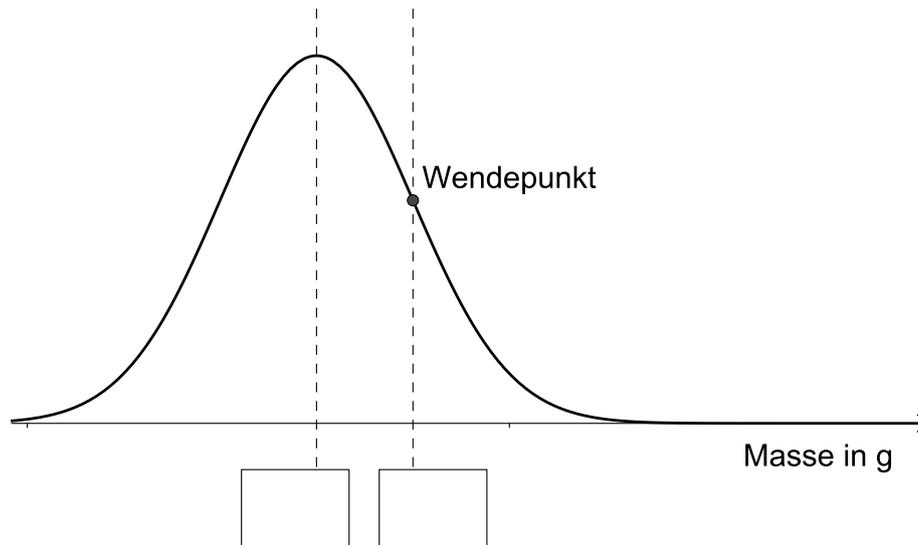


Eine der untersuchten Packungen wird zufällig ausgewählt. Sie gehört zu jenem Viertel aller untersuchten Packungen, in dem die meisten gelben Gummibären zu finden waren.

- Lesen Sie aus dem Boxplot ab, in welchem Bereich die Anzahl der gelben Gummibären in der ausgewählten Packung liegen muss. *[1 Punkt]*
- c) In einer Packung sind alle Geschmacksrichtungen in gleichen Anteilen zu finden.
- Berechnen Sie, wie viel Prozent der Gummibären in dieser Packung die Farbe Rot haben.
[1 Punkt]

d) Die Masse von Gummibären ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 2,3$ g und der Standardabweichung $\sigma = 0,1$ g. Der Graph der Wahrscheinlichkeitsdichte ist in der unten stehenden Abbildung dargestellt.

– Tragen Sie die fehlenden Beschriftungen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. [1 Punkt]



Gummibären, die zu leicht oder zu schwer sind, werden aussortiert. Abweichungen von bis zu $\pm 0,25$ g vom Erwartungswert werden toleriert.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein zufällig ausgewählter Gummibär aussortiert wird. [1 Punkt]

Aufgabe 2

Ganzkörperhyperthermie

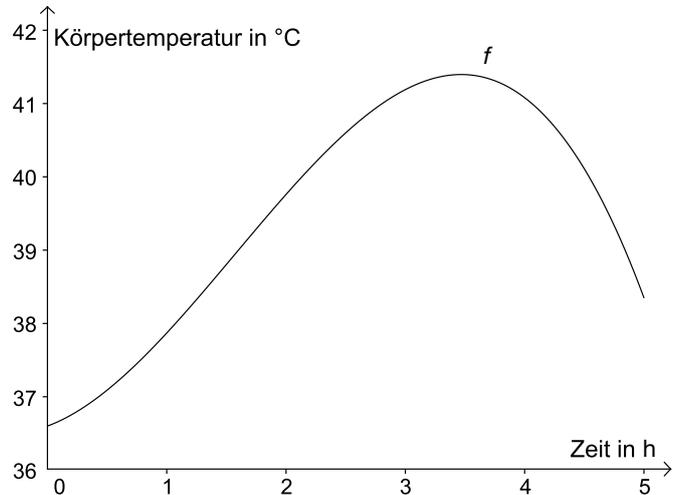
Bei einem Therapieverfahren wird die Körpertemperatur bewusst stark erhöht (künstliches Fieber). Die nebenstehende Grafik dokumentiert näherungsweise den Verlauf des künstlichen Fiebers bei einer solchen Behandlung.

Die Funktion f beschreibt den Zusammenhang zwischen Zeit und Körpertemperatur:

$$f(t) = -0,18 \cdot t^3 + 0,85 \cdot t^2 + 0,6 \cdot t + 36,6$$

t ... Zeit in Stunden (h) mit $0 \leq t \leq 5$

$f(t)$... Körpertemperatur zur Zeit t in °C



- Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Körpertemperatur 37 °C beträgt. [1 Punkt]
- Dokumentieren Sie, wie die maximale Körpertemperatur im angegebenen Zeitintervall mithilfe der Differenzialrechnung berechnet werden kann. [1 Punkt]
 - Begründen Sie, warum der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades höchstens 2 Extrempunkte haben kann. [1 Punkt]
- Berechnen Sie den Zeitpunkt der maximalen Temperaturzunahme. [2 Punkte]
- Die mittlere Körpertemperatur \bar{f} während der 5 Stunden andauernden Behandlung soll ermittelt werden.

Die mittlere Körpertemperatur in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ ist:

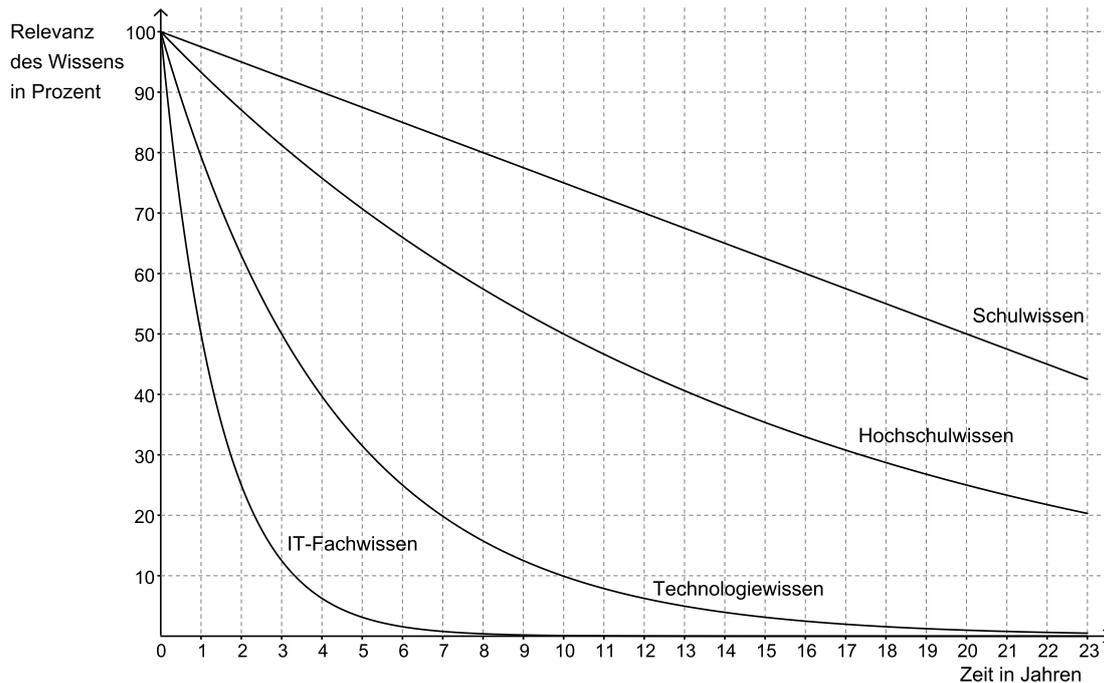
$$\bar{f} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

- Berechnen Sie die mittlere Körpertemperatur \bar{f} im Intervall $[0; 5]$. [1 Punkt]

Aufgabe 3

Halbwertszeit des Wissens

Das zu einem bestimmten Zeitpunkt erworbene Wissen verliert im Laufe der Zeit aufgrund gesellschaftlicher Veränderungen, technologischer Neuerungen etc. an Aktualität und Gültigkeit („Relevanz“). Die nachstehende Abbildung beschreibt die Abnahme der Relevanz des Wissens in verschiedenen Fachbereichen. Für jedes Jahr wird angegeben, wie viel Prozent des ursprünglichen Wissens noch relevant sind.



- a) Man geht davon aus, dass die Relevanz des beruflichen Fachwissens exponentiell abfällt und eine Halbwertszeit von 5 Jahren hat.
- Zeichnen Sie in die Abbildung der Angabe den Verlauf der Relevanz des beruflichen Fachwissens im Intervall $[0; 15]$ ein. [1 Punkt]
- b) Die Relevanz von Technologiewissen nimmt mit einer Halbwertszeit von 3 Jahren exponentiell ab.
- Stellen Sie diejenige Exponentialfunktion auf, die die Relevanz des Technologiewissens in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. [1 Punkt]
 - Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Relevanz des Technologiewissens auf 1 % der anfänglichen Relevanz abgesunken ist. [1 Punkt]
- c) Die Relevanz des Hochschulwissens lässt sich durch folgende Funktion N beschreiben:
- $$N(t) = 100 \cdot e^{-0,0693 \cdot t}$$
- t ... Zeit in Jahren
 $N(t)$... Relevanz des Hochschulwissens zur Zeit t in % des anfänglichen Hochschulwissens
- Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Relevanz des Hochschulwissens nach 7 Jahren bereits abgenommen hat. [1 Punkt]

d) Die Relevanz des Schulwissens kann in den ersten Jahrzehnten durch eine lineare Funktion beschrieben werden.

– Lesen Sie aus der Abbildung in der Angabe die Steigung dieser linearen Funktion ab. *[1 Punkt]*

Aufgabe 4

Gold

Das Edelmetall Gold gilt als besonders wertvoll, weil es selten vorkommt, leicht zu Schmuck verarbeitet werden kann und sehr beständig ist.

- a) Der *World Gold Council*, eine globale Lobby-Organisation der Goldminenindustrie, schätzt die bis zum Jahr 2012 weltweit geförderte Goldmenge auf rund $1,713 \cdot 10^8$ Kilogramm (kg). Gold hat eine Dichte von 19,3 Gramm pro Kubikzentimeter (g/cm^3). Die Masse ist das Produkt von Volumen und Dichte.

Stellen Sie sich vor, dass die gesamte weltweit geförderte Goldmenge in einen Würfel gegossen wird.

– Berechnen Sie die Kantenlänge dieses Würfels in Metern. [1 Punkt]

- b) Gold kommt in der Natur auch in der Form von Nuggets (Goldklumpen) vor. Es wird in der Einheit *Feinunze* (oz) gehandelt, die einer Masse von 31,1035 Gramm (g) reinen Goldes entspricht.

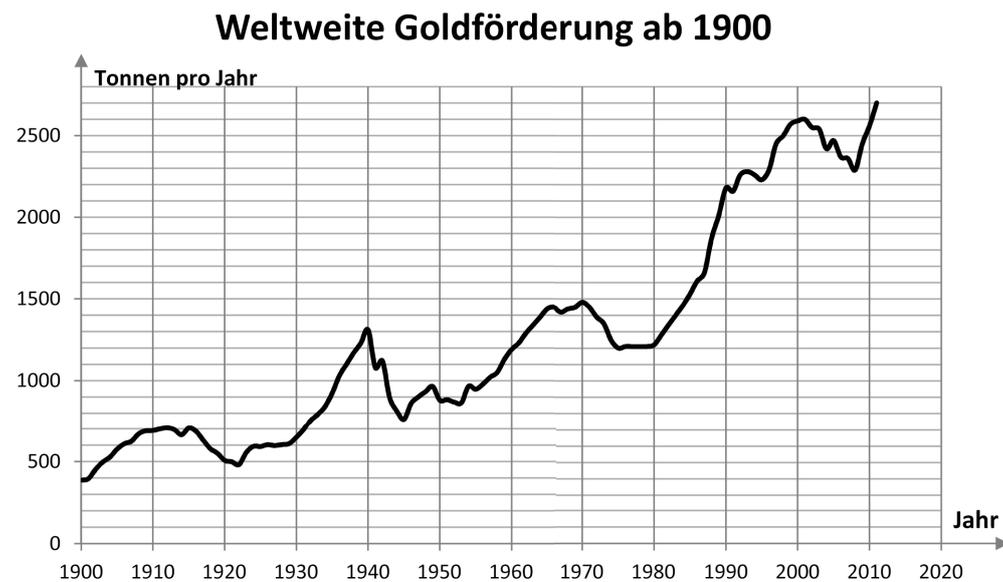
Gesucht ist der Wert W eines Nuggets in Euro, wenn folgende Größen bekannt sind:

m ... Masse des Nuggets in Gramm (g)

p ... Preis in Euro für eine Feinunze Gold

– Erstellen Sie eine Formel für W . [1 Punkt]

- c) Die nachstehende Grafik zeigt die weltweite jährliche Förderung von Gold ab dem Jahr 1900 in Tonnen.



Quelle: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Goldfoerderung.png> [29.08.2013] (adaptiert)

– Lesen Sie aus der obigen Grafik ab, in welchem Jahrzehnt die weltweite Förderung absolut am stärksten gestiegen ist. [1 Punkt]

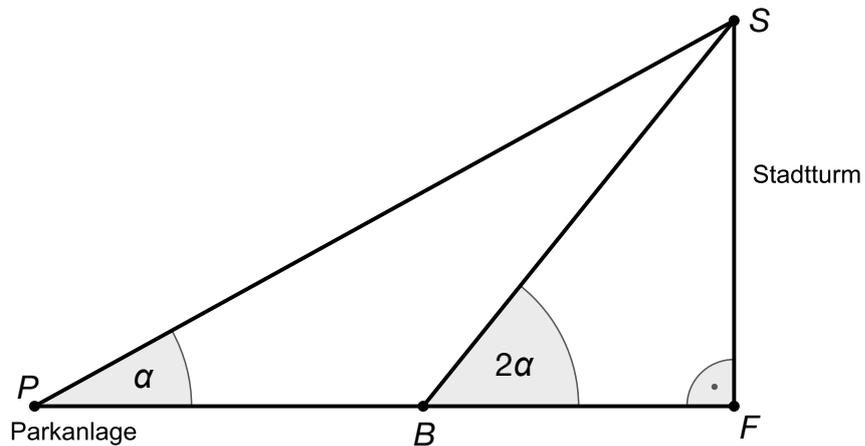
d) In einer Zeitung wird folgende Analyse veröffentlicht: „Der Wert der Ein-Unzen-Krugerrand-Goldmünze ist im Jahr 2010 um 20 % gestiegen. Im Jahr 2011 stieg der Wert nochmals um 10 %. Also ist der Wert der Münze in diesen beiden Jahren insgesamt um 30 % gestiegen.“

– Begründen Sie, warum diese Aussage über die Wertentwicklung nicht richtig ist. *[1 Punkt]*

Aufgabe 5

Stadtturm

- a) Von einer neuen Parkanlage sieht man die Spitze des 51 m hohen Stadtturms unter dem Höhenwinkel $\alpha = 38,2^\circ$.



- Berechnen Sie, um wie viel Meter man sich dem Stadtturm entlang der Strecke \overline{PF} nähern muss, damit dieser unter dem doppelten Höhenwinkel zu sehen ist (siehe oben stehende Skizze). [2 Punkte]
- b) Der Stadtturm mit einer Höhe h wirft zu einem bestimmten Zeitpunkt einen Schatten der Länge b .
- Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Höhenwinkels, unter dem die Sonne zu diesem Zeitpunkt in dieser Stadt erscheint, auf. [1 Punkt]
- c) Der 51 m hohe Stadtturm hat die Form eines Quaders mit quadratischer Grundfläche; die Seitenlänge dieses Quadrats beträgt 4 m. Zwei gegenüberliegende Seitenwände des Stadtturms sollen mit Glasplatten verkleidet werden. Pro Quadratmeter beträgt die Masse der verwendeten Glasplatten 30 Kilogramm.
- Dokumentieren Sie, wie Sie die Gesamtmasse der Glasverkleidung in Tonnen berechnen können. [1 Punkt]

Name:	
Klasse/Jahrgang:	



Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reife- und Diplomprüfung

BHS

11. Mai 2015

Angewandte Mathematik

Teil B (Cluster 2)



Hinweise zur Aufgabenbearbeitung

Das vorliegende Aufgabenheft (Teil B) enthält drei Aufgaben mit unterschiedlich vielen Teilaufgaben. Die Teilaufgaben sind unabhängig voneinander bearbeitbar. Ihnen stehen insgesamt 270 Minuten an reiner Arbeitszeit für Teil A und Teil B zur Verfügung.

Verwenden Sie für die Bearbeitung einen nicht radierbaren, blau oder schwarz schreibenden Stift.

Verwenden Sie für die Bearbeitung ausschließlich das Aufgabenheft und die Ihnen zur Verfügung gestellten Antwortblätter. Schreiben Sie auf der ersten Seite des Aufgabenheftes Ihren Namen in das dafür vorgesehene Feld und auf jedes Antwortblatt Ihren Schülercode. Geben Sie bei der Beantwortung jeder Teilaufgabe deren Bezeichnung an.

In die Beurteilung wird alles einbezogen, was nicht durchgestrichen ist. Streichen Sie Notizen durch.

Die Verwendung eines durch die Schulbuchaktion approbierten Formelheftes und elektronischer Hilfsmittel (grafikfähige Taschenrechner oder andere entsprechende Technologie) ist erlaubt, sofern keine Kommunikation nach außen getragen werden kann und keine Eigendaten in die elektronischen Hilfsmittel implementiert sind. Handbücher zu den elektronischen Hilfsmitteln sind in der Original-Druckversion oder in im elektronischen Hilfsmittel integrierter Form zulässig.

Abzugeben sind das Aufgabenheft und alle von Ihnen verwendeten Antwortblätter.

Es gilt folgender Beurteilungsschlüssel:

42–47 Punkte	Sehr gut
36–41 Punkte	Gut
30–35 Punkte	Befriedigend
20–29 Punkte	Genügend
0–19 Punkte	Nicht genügend

Viel Erfolg!

Aufgabe 6

Schadstoffausbreitung

Eine Messstation registriert täglich zu einem bestimmten Zeitpunkt die Konzentration der von einer Fabrik emittierten Schadstoffe (in mg/m^3). Es wird angenommen, dass diese Schadstoffkonzentrationen annähernd normalverteilt sind.

a) Es werden Messungen an 10 Tagen vorgenommen:

Schadstoffkonzentration in mg/m^3	152	166	149	153	172	147	157	164	157	168
--	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert \bar{x} . [1 Punkt]
- Ermitteln Sie das 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ , wenn bekannt ist, dass die Standardabweichung $\sigma = 8,5 \text{ mg}/\text{m}^3$ beträgt. [2 Punkte]

b) Die Verteilung der Schadstoffkonzentration kann sowohl mithilfe der Dichtefunktion als auch mithilfe der Verteilungsfunktion der Normalverteilung beschrieben werden. In der nachstehenden Abbildung 1 ist der Graph der Dichtefunktion dargestellt.

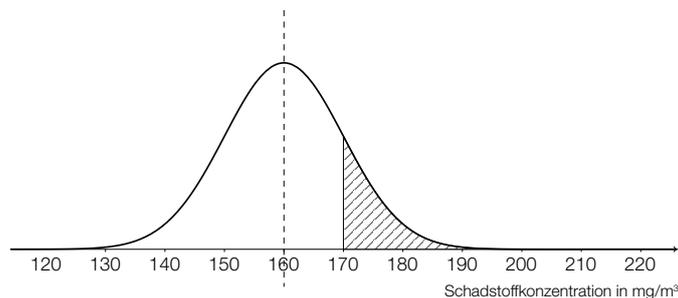


Abbildung 1

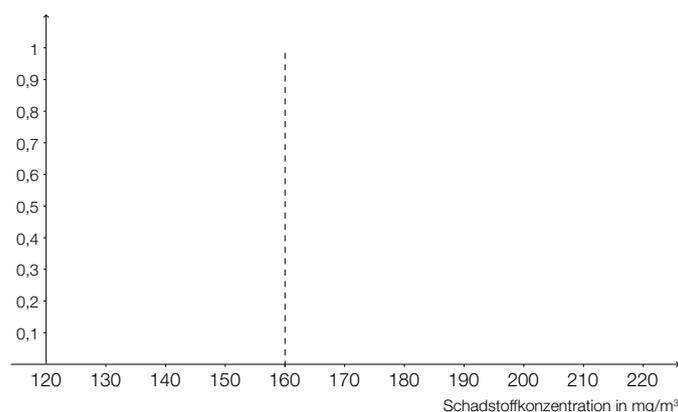


Abbildung 2

- Zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion in Abbildung 2 ein. [1 Punkt]
- Veranschaulichen Sie die in Abbildung 1 schraffiert dargestellte Wahrscheinlichkeit in Abbildung 2. [1 Punkt]
- Erklären Sie den mathematischen Zusammenhang zwischen diesen beiden Funktionen. [1 Punkt]

- c) Die Fabriksleitung geht vom Erwartungswert $\mu = 160 \text{ mg/m}^3$ und von der Standardabweichung $\sigma = 10 \text{ mg/m}^3$ aus.
- Ermitteln Sie den symmetrisch um μ gelegenen Bereich, in den erwartungsgemäß 99 % aller Messwerte fallen (99-%-Zufallsstreubereich). *[1 Punkt]*
 - Geben Sie an, wie sich die Breite dieses Zufallsstreubereichs verändert, wenn anstelle von 99 % nur noch 95 % aller Messwerte in diesen Bereich fallen sollen. *[1 Punkt]*

Aufgabe 7

Bakterienkultur

a) Eine Bakterienkultur mit 50 Bakterien wird zu einem Zeitpunkt $t = 0$ angelegt. Nach 100 Minuten werden bereits 750 Bakterien gezählt. Die Funktion N beschreibt das Wachstum der Bakterienkultur: $N(t)$ ist die Anzahl der Bakterien nach t Minuten. Die 1. Ableitung der Funktion N ist proportional zu N . Die entsprechende Proportionalitätskonstante bezeichnet man als *Wachstumsrate*.

- Stellen Sie die zugehörige Differenzialgleichung für N auf. [1 Punkt]
- Lösen Sie die Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*. [1 Punkt]
- Berechnen Sie, wie viele Bakterien nach 3 Stunden vorhanden sind. [1 Punkt]
- Geben Sie an, wie sich das Wachstumsverhalten ändert, wenn die Bakterienkultur eine größere Wachstumsrate hat. [1 Punkt]

b) Die Beobachtung einer Bakterienkultur ergab folgende Daten:

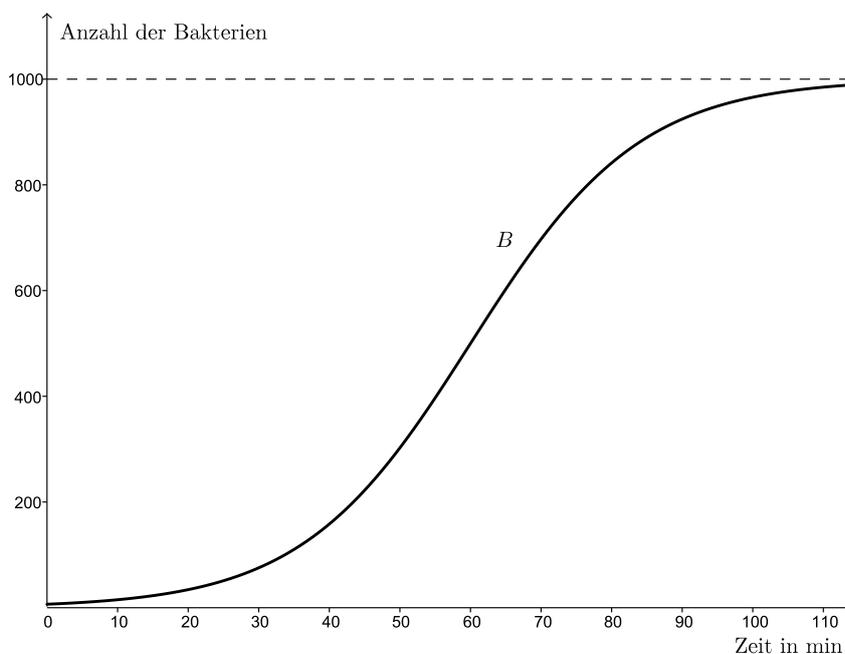
Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Anzahl der Bakterien	110	120	156	185	190	245	274	340	360	430

- Ermitteln Sie die Gleichung der exponentiellen Ausgleichsfunktion, die die Bakterienanzahl in Abhängigkeit von der Zeit nach Beginn der Beobachtung näherungsweise beschreibt. [1 Punkt]
- Berechnen Sie mithilfe der Ausgleichsfunktion, wie viele Minuten nach Beginn der Beobachtung 1 000 Bakterien zu erwarten sind. [1 Punkt]

- c) Die Funktion B beschreibt näherungsweise, wie viele Bakterien sich zu jedem Zeitpunkt in einer Petrischale befinden. Der zugehörige Funktionsgraph ist im nachstehenden Diagramm dargestellt.

t ... Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten

$B(t)$... Anzahl der Bakterien zur Zeit t



- Lesen Sie aus dem Diagramm ab, wie viele Minuten nach Beginn der Beobachtung das Wachstum der Bakterienkultur am größten ist. [1 Punkt]

Die entsprechende Differenzialgleichung zur Beschreibung dieses Bakterienwachstums lautet:

$$\frac{dB}{dt} = 8,35 \cdot 10^{-5} \cdot B \cdot (1000 - B) \text{ mit } B > 0$$

- Argumentieren Sie anhand der Differenzialgleichung, für welche Werte von B die Bakterienanzahl zunimmt. [1 Punkt]

Aufgabe 8

Thermistor

Ein *Thermistor* oder *Heißleiter* ist ein Halbleiter, dessen elektrischer Widerstand mit zunehmender Temperatur T abnimmt. Die Funktion R beschreibt diesen Zusammenhang:

$$R(T) = a \cdot e^{-\frac{b}{T}}$$

T ... Temperatur in Kelvin (K)

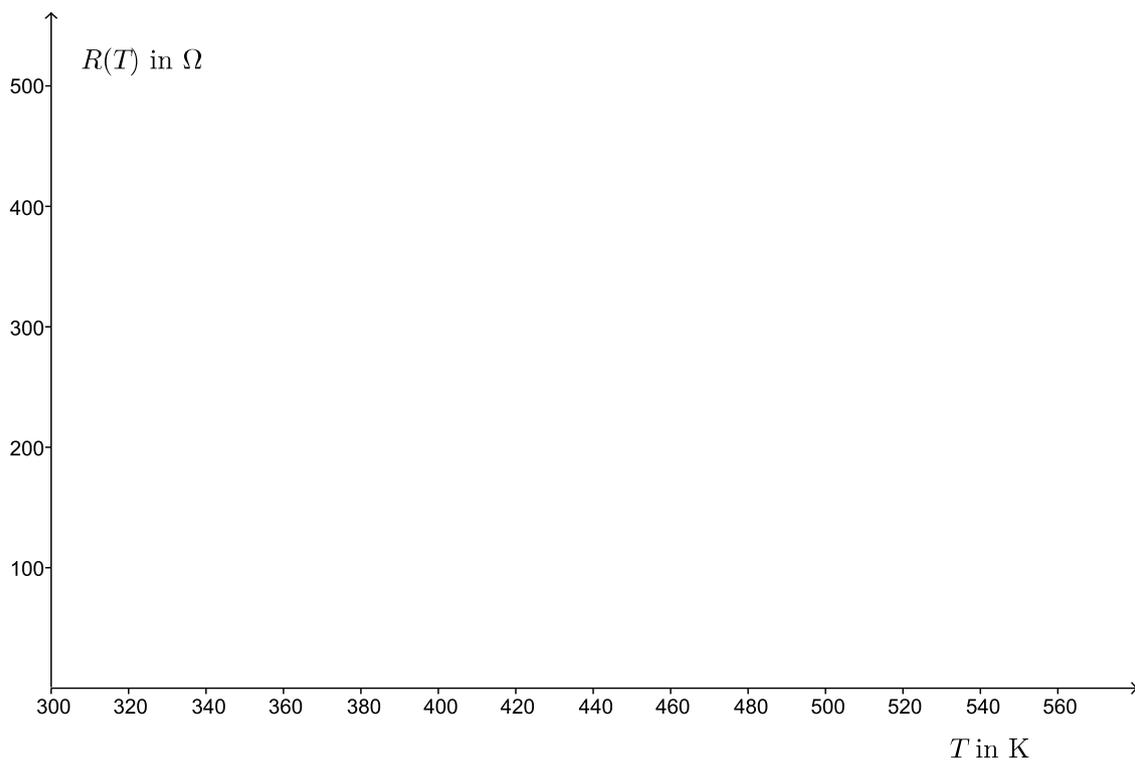
$R(T)$... elektrischer Widerstand bei der Temperatur T in Ohm (Ω)

a ... Konstante in Ω ($a > 0$)

b ... Konstante in K ($b > 0$)

a) – Begründen Sie mathematisch, warum die Funktion R monoton fallend ist. [1 Punkt]

– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion R im Bereich $300 \text{ K} \leq T \leq 550 \text{ K}$ für $a = 0,1 \text{ } \Omega$ und $b = 2500 \text{ K}$ im nachstehenden Koordinatensystem. [1 Punkt]



b) Verwenden Sie $a = 0,1 \text{ } \Omega$ und $b = 2500 \text{ K}$.

– Linearisieren Sie die Funktion R an der Stelle $T_0 = 373,15 \text{ K}$, d. h., bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von R im Punkt $(T_0 | R(T_0))$. [2 Punkte]

– Ermitteln Sie den Betrag des relativen Fehlers, wenn man an der Stelle $T = 390 \text{ K}$ den Widerstand mit der linearisierten Funktion anstatt mit der Funktion R berechnet. [1 Punkt]

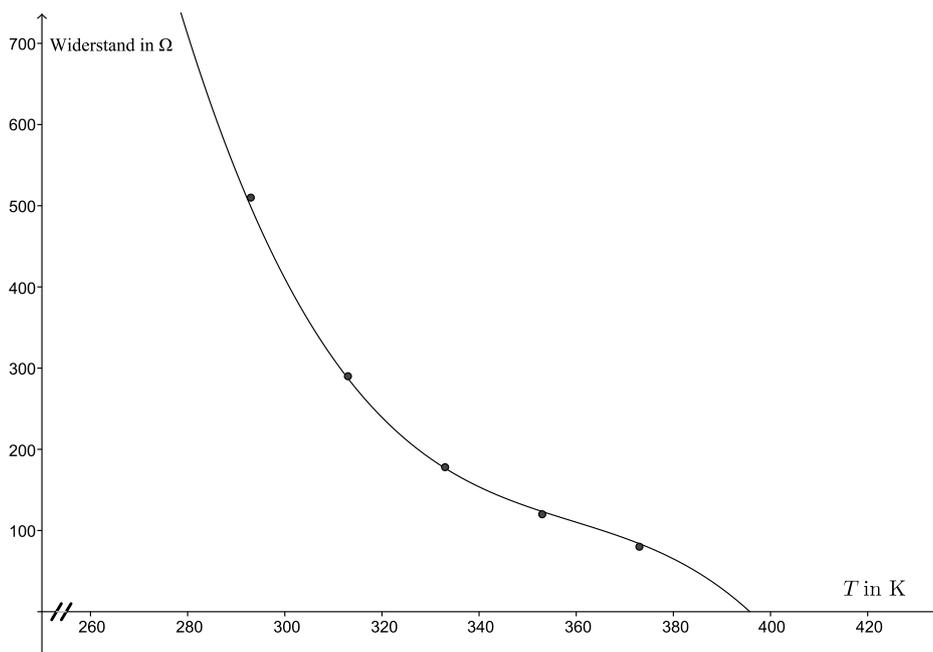
c) Für einen bestimmten Halbleiter wurden folgende Werte gemessen:

T in K	R in Ω
293	510
313	290
333	178
353	120
373	80

Zur weiteren Auswertung wird eine Polynomfunktion 3. Grades als Ausgleichsfunktion verwendet.

– Ermitteln Sie diese Ausgleichsfunktion. [1 Punkt]

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zu ermittelnden Ausgleichsfunktion P bereits eingezeichnet.



– Erklären Sie ausgehend von der obigen Abbildung, warum die 1. Ableitung dieser Polynomfunktion 3. Grades keine reellen Nullstellen hat. [1 Punkt]

