Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung

AHS

17. September 2014

Mathematik

Teil-1-Aufgaben

Korrekturheft

BM BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Aufgabe 1

Aussagen über Zahlenmengen

Lösungserwartung:

Reelle Zahlen mit periodischer oder endlicher Dezimaldarstellung sind rationale Zahlen.	☒
Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen *a*, *b* existiert stets eine weitere rationale Zahl.	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Aufgabe 2

Definitionsmengen

Lösungserwartung:

$\ln(x + 1)$	C
$\sqrt{1 - x}$	F
$\frac{2x}{x \cdot (x + 1)^2}$	D
$\frac{2x}{x^2 + 1}$	A

A	$D_A = \mathbb{R}$
B	$D_B = (1; \infty)$
C	$D_C = (-1; \infty)$
D	$D_D = \mathbb{R}\setminus\{-1; 0\}$
E	$D_E = (-\infty; 1)$
F	$D_F = (-\infty; 1]$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn alle vier Buchstaben richtig zugeordnet sind.

Aufgabe 3

Quadratische Gleichung

Lösungserwartung:

$c = -3$

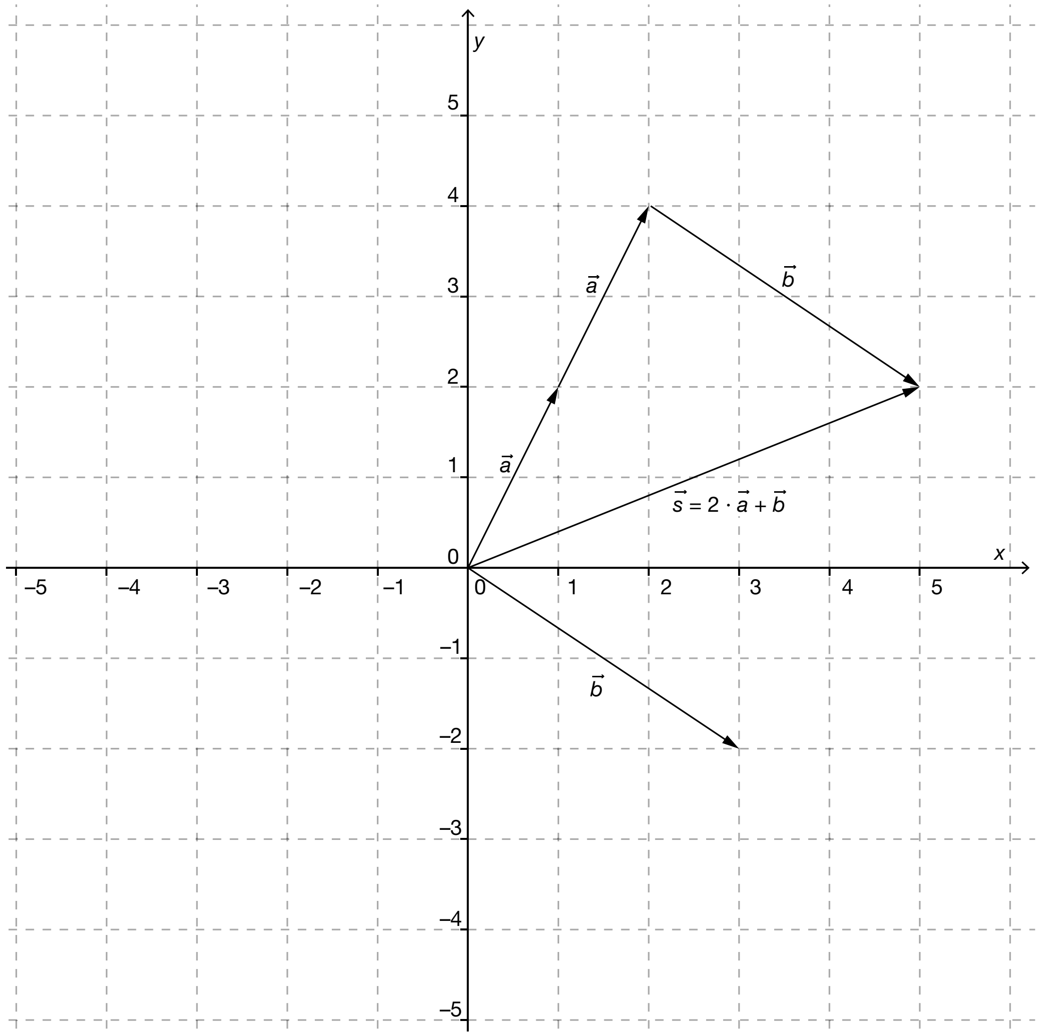
Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Aufgabe 4

Vektoraddition

Lösungserwartung:



Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Die Lösung ist dann als richtig zu werten, wenn der Vektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ richtig dargestellt ist. Die Spitze des Vektors $\vec{s}$ muss korrekt und klar erkennbar eingezeichnet sein. Als Ausgangspunkt kann ein beliebiger Punkt gewählt werden. Die Summanden müssen nicht dargestellt werden.

Aufgabe 5

Parameterdarstellung von Geraden

Lösungserwartung:

$h_2 \colon X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$	☒
$h_4 \colon X = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t_4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Antworten angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Aufgabe 6

Steigungswinkel

Lösungserwartung:

$\tan(\alpha) = \frac{7}{100}$

oder

$\alpha = \arctan\left(\frac{7}{100}\right)$

oder

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{7}{100}\right)$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine richtige Formel. Korrekte äquivalente Schreibweisen sind als richtig zu werten.

Aufgabe 7

Quadratische Funktion

Lösungserwartung:

Der Graph der Funktion f hat zwei verschiedene reelle Nullstellen, wenn gilt: $a > 0$ und $b < 0$.	☒
Der Graph der Funktion f mit $b = 0$ berührt die x-Achse in der lokalen Extremstelle.	☒
Für $a < 0$ hat der Graph der Funktion f einen Hochpunkt.	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau drei Aussagen angekreuzt sind und alle Kreuze richtig gesetzt sind.

Aufgabe 8

Eigenschaften von Funktionen zuordnen

Lösungserwartung:

lineare Funktion f mit $f(x) = a \cdot x + b$	C
Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ ($b > 0$, $b \neq 1$)	A
Wurzelfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$	F
Sinusfunktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$	D

A	Die Funktion f ist für $a > 0$ und $0 < b < 1$ streng monoton fallend.
B	Die Funktion f besitzt genau drei Nullstellen.
C	Die Funktion f besitzt in jedem Punkt die gleiche Steigung.
D	Der Graph der Funktion f besitzt einen Wendepunkt im Ursprung.
E	Die Funktion f ist für $b = 2$ konstant.
F	Die Funktion f ist nur für $x \geq 0$ definiert.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn alle vier Buchstaben richtig zugeordnet sind.

Aufgabe 9

Steigung des Graphen einer linearen Funktion

Lösungserwartung:

Die Steigung der zugeordneten linearen Funktion beträgt $-\frac{3}{5}$.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Wird die Steigung der linearen Funktion z. B. mit k oder mit $f'(x)$ bezeichnet, so ist dies als richtig zu werten. Jede korrekte Schreibweise des Ergebnisses (als äquivalenter Bruch oder als Dezimalzahl) ist als richtig zu werten.

Aufgabe 10

Vergleich dreier Geraden

Lösungserwartung:

$k_2 > k_3$	☒
$k_3 < k_1$	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Aufgabe 11

Eigenschaften einer linearen Funktion

Lösungserwartung:

$f(x + 1) = f(x) + k$	☒
f besitzt immer genau eine Nullstelle.	☒
$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k$ für $x_1 \neq x_2$	☒
Die Krümmung des Graphen der Funktion f ist null.	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau vier Aussagen angekreuzt sind und alle Kreuze richtig gesetzt sind.

Aufgabe 12

Graph einer quadratischen Funktion

Lösungserwartung:

$a = 3$
$b = -1$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn beide Parameter korrekt angegeben sind.
Toleranzintervalle: $a \in [2{,}9;\ 3{,}1]$; $b \in [-1{,}1;\ -0{,}9]$.

Aufgabe 13

Differenzenquotient – Differenzialquotient

Lösungserwartung:

$\frac{f(3) - f(0)}{3} < 0$	☒
$f'(-2) > 0$	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Aufgabe 14

Beschleunigungsfunktion bestimmen

Lösungserwartung:

$a(t) = t + 10$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn eine richtige Gleichung der Funktion *a* angegeben ist.

Aufgabe 15

Ableitung einer Polynomfunktion

Lösungserwartung:

①	
$3x^2 - 4x + 7$	☒

②	
$6x - 4$	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn für beide Lücken ausschließlich der jeweils richtige Satzteil angekreuzt ist.

Aufgabe 16

Ableitung

Lösungserwartung:

An den Stellen $x_1 = -4$ und $x_2 = 4$ hat f lokale Extrema.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn beide Stellen richtig angegeben sind. Eine Schreibweise wie z. B. $x = \pm 4$ ist auch zulässig.
Die Aufgabe ist falsch gelöst, wenn nur eine der beiden lokalen Extremstellen angegeben ist.

Aufgabe 17

Extremstelle

Lösungserwartung:

Wenn die Funktion f bei x_0 das Monotonieverhalten ändert, dann liegt bei x_0 eine lokale Extremstelle von f.	☒
Wenn x_0 eine lokale Extremstelle von f ist, dann ist $f'(x_0) = 0$.	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Aufgabe 18

Geschwindigkeitsfunktion

Lösungserwartung:

Die zurückgelegte Wegstrecke ist in den ersten 5 Sekunden größer als in den zweiten 5 Sekunden.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung.

Aufgabe 19

Computer- und Videospiele

Lösungserwartung:

Die Anzahl der in der Kategorie „freigegeben ab 16 Jahren“ eingestuften Spiele ist in den beiden Jahren 2008 und 2009 nahezu gleich.	☒
Im Jahr 2008 erhielt etwa jedes zwanzigste Spiel keine Jugendfreigabe.	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und alle Kreuze richtig gesetzt sind.

Aufgabe 20

Statistische Kennzahlen

Lösungserwartung:

Spannweite	☒
empirische Varianz	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Kennzahlen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Aufgabe 21

Adventkalender

Lösungserwartung:

$$\frac{20}{24} \cdot \frac{19}{23} \cdot \frac{4}{22} = \frac{95}{759} \approx 0{,}1252 \approx 12{,}5\ \%$$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Jede der angeführten Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch, Dezimalzahl oder in Prozenten) ist als richtig zu werten. Toleranzintervall: [0,12; 0,13] bzw. [12 %; 13 %].

Aufgabe 22

Binomialkoeffizient

Lösungserwartung:

Gegeben sind sechs verschiedene Punkte einer Ebene, von denen nie mehr als zwei auf einer Geraden liegen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei Punkte auszuwählen, um jeweils eine Gerade durchzulegen?	☒
Von sechs Kugeln sind vier rot und zwei blau. Sie unterscheiden sich nur durch ihre Farbe. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln in einer Reihe anzuordnen?	☒

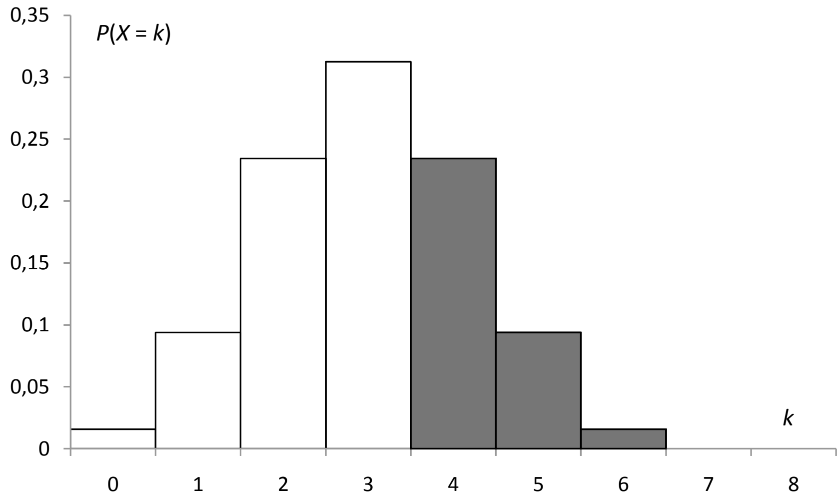
Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aufgabenstellungen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Aufgabe 23

Binomialverteilung

Lösungserwartung:



Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Jede Lösung, die den Bereich $P(X > 3)$ farbig hervorhebt oder deutlich kennzeichnet, ist als richtig zu werten.

Aufgabe 24

Binomialverteilte Zufallsvariable

Lösungserwartung:

X beschreibt die Anzahl der roten Kugeln bei dreimaligem Ziehen, wenn jede entnommene Kugel wieder zurückgelegt wird.	☒
X beschreibt die Anzahl der weißen Kugeln bei fünfmaligem Ziehen, wenn jede entnommene Kugel wieder zurückgelegt wird.	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung

AHS

17. September 2014

Mathematik

Teil-2-Aufgaben

Korrekturheft

BMBF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Aufgabe 1

Länderporträt Gambia

a) Lösungserwartung:

Ansatz: $2{,}2 = a \cdot b^t$, wobei der Wert für a aus dem Intervall [1,8; 1,85] und der Wert für b aus dem Intervall [1,025; 1,027] gewählt werden muss.
Das Ergebnis für t liegt demnach im Intervall [6,5; 8,2].

Für die Jahre 1990 bis 1993 lässt sich die Bevölkerungszahl am besten durch eine einzige Exponentialfunktion beschreiben, da die Prozentwerte des Bevölkerungswachstums annähernd konstant sind.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Berechnung.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Die Lösung muss inhaltlich der Lösungserwartung entsprechen. Alle Vierjahresintervalle zwischen 1989 und 1994 sind (im Hinblick auf die Ablesegenauigkeit) zulässig.

b) Lösungserwartung:

Ansatz: $\frac{a \cdot 1\,000\,000}{11\,000}$, wobei der Wert für a aus dem Intervall [1,8; 1,85] gewählt werden muss.
Das Ergebnis für die Bevölkerungsdichte liegt demnach im Intervall [163,6; 168,2].

Die Antwort auf die Frage, um wie viel Prozent die Bevölkerungsdichte in Gambia größer war als in Österreich, muss daher im Intervall [63 %; 70 %] liegen.

Der Faktor 0,2806 beschreibt die Bevölkerungszahl in Gambia im Jahr 1950 (in Mio. Einwohner/innen).

$$\frac{N(23) \cdot 1\,000\,000}{11\,000} \approx 50{,}86$$

Die Bevölkerungsdichte von Gambia für das Jahr 1973 liegt bei ca. 50,86 Einwohner/innen/km².

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Berechnung.
– Ein Punkt für eine korrekte Berechnung und (sinngemäß) korrekte Deutung der Bevölkerungsdichte von Gambia für das Jahr 1973. Lösungsintervall: [50; 51]. Die Interpretation des Faktors muss sinngemäß der Lösungserwartung entsprechen.

Aufgabe 2

Kosten und Erlös

a) Lösungserwartung:

$K(10) = 400$, $K(14) = 800$, $\frac{K(14) - K(10)}{14 - 10} = 100$

Der durchschnittliche Kostenanstieg beträgt im Intervall [10 ME; 14 ME] 100 GE/ME.
Kostendegression im Intervall: [0; 4).

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Berechnung des Differenzenquotienten.
– Ein Punkt für die Angabe des korrekten Intervalls (es sind sowohl offene, geschlossene als auch halboffene Intervalle zulässig).

b) Lösungserwartung:

Der Verkaufspreis beträgt 80 GE pro ME.

$E(x) = 80 \cdot x$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die korrekte Angabe des Verkaufspreises.
– Ein Punkt, wenn $E(x)$ richtig angegeben ist.

c) Lösungserwartung:

Die Kosten und der Erlös sind gleich hoch, daher wird kein Gewinn erzielt. Die x-Koordinaten der Schnittpunkte geben die Gewinnschwellen an. Bei einer Menge x, die sich zwischen den beiden Gewinnschwellen befindet, macht das Unternehmen Gewinn.

$K(10) = 400$, $E(10) = 800$; das Unternehmen macht einen Gewinn von 400 GE.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine richtige Interpretation der Schnittpunkte und des Bereiches zwischen den Stellen der Schnittpunkte. Sinngemäß gleichwertige Aussagen sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die korrekte Berechnung des Gewinns.

Aufgabe 3

Bakterienkultur

a) Lösungserwartung:

①	
3 mm²	☒

②	
5 %	☒

Dem vorliegenden exponentiellen Wachstum bzgl. der Fläche der Bakterienkultur wird durch die Größe der Petrischale (ca. 2376 mm²) eine Grenze gesetzt.

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt ist nur dann zu geben, wenn für beide Lücken ausschließlich der jeweils richtige Satzteil angekreuzt ist.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Beschreibung. Korrekt sind alle Antworten, die erläutern, dass kein unbeschränktes Wachstum innerhalb der Petrischale möglich ist.

b) Lösungserwartung:

Verdoppelungszeit: $t = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}05)} \approx 14{,}21$
Die Verdoppelungszeit beträgt ca. 14 Stunden.

Begründung:

Bei der Berechnung der Verdoppelungszeit t sieht man, dass das Ergebnis vom Anfangswert $A(0) = 3$ unabhängig ist (er fällt durch Gleichungsumformungen weg), z. B.:

$2 \cdot 3 = 3 \cdot 1{,}05^t \quad |:3$
$2 = 1{,}05^t$
$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}05)}$

oder

Wenn in jeder Stunde gleich viele Prozent dazukommen, dann dauert es immer – also unabhängig von der Anfangsmenge – gleich lang, bis 100 % dazugekommen sind.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Berechnung. Toleranzintervall: [14; 15].
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Auch andere Berechnungen mit einer Variablen (z. B.: a anstelle von 1,05, $A(0)$ anstelle von 3) oder selbst anderer Bezeichnung für $A(t)$ (z. B.: $N(t)$), die die Unabhängigkeit von t vom Anfangswert (hier $A(0)$) zeigen, gelten als richtig.

Aufgabe 4

Baumwachstum

a) Lösungserwartung:

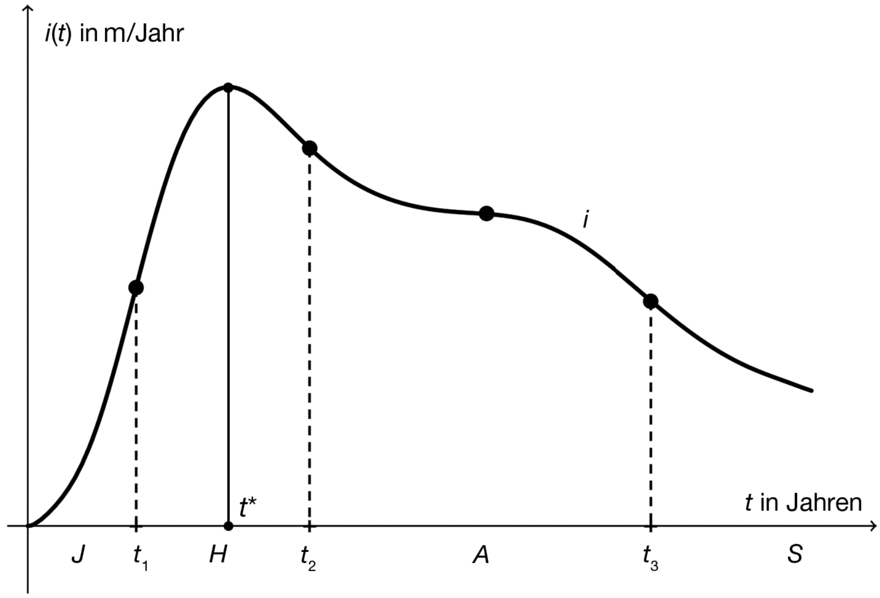
Im mittleren Bereich der Altersphase nimmt die Höhe des Baumes annähernd linear zu, weil der Höhenzuwachs pro Jahr annähernd konstant ist.

Höhe des Baumes am Beginn der Senilitätsphase: $\int_0^{t_3} i(t)\,\mathrm{d}t$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die Nennung der Altersphase (bzw. die Markierung der betreffenden Stelle im Graphen) und die sinngemäß richtige Begründung, dass die Höhe des Baumes dann linear zunimmt, wenn *i* waagrecht verläuft, d. h. der Höhenzuwachs konstant ist.
– Ein Punkt für das richtige Anschreiben des Integrals (inkl. Grenzen und Integrationsvariable).

b) Lösungserwartung:



Zu diesem Zeitpunkt (t^*) ist die Wachstumsgeschwindigkeit des Baumes größer als zu den Zeitpunkten davor und danach.
Solange *i* monoton steigt (Jugendphase), wächst der Baum immer schneller, d. h., die Höhenzunahme pro Jahr wird größer. Wenn *i* monoton fällt (Altersphase), nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit ab, d. h., der Baum wächst immer langsamer.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Kennzeichnung der Maximumstelle und für eine sinngemäß richtige Interpretation dieses Zeitpunktes. Die Maximumstelle muss (auf der t-Achse!) erkennbar gekennzeichnet sein. Aus der formulierten Aussage muss klar hervorgehen, dass der Baum zu diesem Zeitpunkt am schnellsten wächst.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation des Monotonieverhaltens von *i* im Hinblick auf das Baumwachstum.

Aufgabe 5

Lottozahlen

a) Lösungserwartung:

Die Ziehung der Gewinnzahlen 3, 12, 19, 25, 36, 41 bei einer Lottoziehung ist gleich wahrscheinlich wie die Ziehung der Gewinnzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6.	☒
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl 17 als erste Zahl gezogen wird, beträgt bei jeder Ziehung $\frac{1}{45}$.	☒

Richtigstellung:

– Eine Zahl, die bei einer Lottoziehung gezogen wurde, wird bei der darauffolgenden Lottoziehung mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{6}{45}$ erneut gezogen.
– Im Kalenderjahr 2010 war die Wahrscheinlichkeit, die Zahl 8 zu ziehen, bei jeder Ziehung gleich $\frac{6}{45}$.
– Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl 32 bei einer Ziehung als zweite Zahl gezogen wird, beträgt $\frac{1}{45}$.

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Richtigstellung einer der drei falschen Aussagen.

b) Lösungserwartung:

Die relative Ziehungshäufigkeit der Zahl 10 im Kalenderjahr 2010 beträgt $\frac{19}{104} \approx 0{,}183$.

Bei 2056 Ziehungen hat sich die relative Häufigkeit $\left(\frac{270}{2056} \approx 0{,}131\right)$ der theoretischen Ziehungswahrscheinlichkeit von $\frac{6}{45} \approx 0{,}133$ im Vergleich zu den 104 Ziehungen des Kalenderjahres 2010 angenähert.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für das korrekte Bestimmen der relativen Ziehungshäufigkeit, wobei das Ergebnis in Bruch-, Dezimal- oder Prozentschreibweise angegeben werden kann.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Erklärung, warum die Häufigkeiten in den Abbildungen 1 und 2 mit dem empirischen Gesetz der großen Zahlen für die relative Ziehungshäufigkeit der Zahl 10 im Einklang stehen.

c) Lösungserwartung:

$\mu = 2\,056 \cdot \frac{6}{45} \approx 274 \qquad \sigma = \sqrt{2\,056 \cdot \frac{6}{45} \cdot \frac{39}{45}} \approx 15$

$\mu - 2\sigma \approx 243$
$\mu + 2\sigma \approx 305$

Bei allen Zahlen, die höchstens 243-mal oder mindestens 305-mal gezogen wurden, weicht die Ziehungshäufigkeit um mehr als 2σ vom Erwartungswert ab. Dies trifft auf die Zahlen 39, 42 und 43 zu.

Es wurde die Binomialverteilung verwendet, da es um Anzahlen geht („absolute Ziehungshäufigkeit"), es nur zwei mögliche Ausgänge bei einer Lottoziehung gibt (eine bestimmte Zahl wurde gezogen oder sie wurde nicht gezogen) und weil die Ziehungswahrscheinlichkeit von Ziehung zu Ziehung gleich bleibt.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für das Ermitteln der Zahlen 39, 42 und 43.
– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung, warum die Binomialverteilung verwendet werden darf.