Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Oktober 2021

Mathematik

Kompensationsprüfung 1
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur standardisierten Durchführung der Kompensationsprüfung

Die vorliegende Angabe zur Kompensationsprüfung umfasst fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind. Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: „Aufgabenstellung“ und „Leitfrage“.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Die Verwendung der vom zuständigen Regierungsmitglied für die Klausurarbeit freigegebenen Formelsammlung für die SRP in Mathematik ist erlaubt. Weiters ist die Verwendung von elektronischen Hilfsmitteln (z. B. grafikfähiger Taschenrechner oder andere entsprechende Technologie) erlaubt, sofern keine Kommunikationsmöglichkeit (z. B. via Internet, Intranet, Bluetooth, Mobilfunknetzwerke etc.) gegeben ist und der Zugriff auf Eigendateien im elektronischen Hilfsmittel nicht möglich ist.

Nach der Prüfung sind alle Unterlagen (Prüfungsaufgaben, Arbeitsblätter etc.) der Kandidatinnen und Kandidaten einzusammeln. Die Prüfungsunterlagen (Prüfungsaufgaben, Arbeitsblätter, produzierte digitale Arbeitsdaten etc.) dürfen erst nach dem für die Kompensationsprüfung vorgesehenen Zeitfenster öffentlich werden.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Der nachstehende Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Kandidat/in 1		Kandidat/in 2		Kandidat/in 3		Kandidat/in 4		Kandidat/in 5	
Aufgabe 1										
Aufgabe 2										
Aufgabe 3										
Aufgabe 4										
Aufgabe 5										
gesamt										

Erläuterungen zur Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist bei jeder Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und bei jeder Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

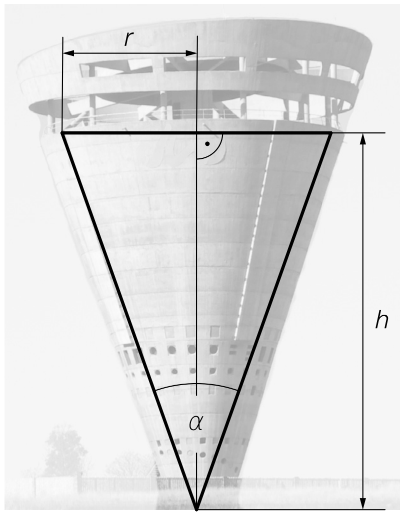
Beurteilungsschlüssel für die Kompensationsprüfung

Note	**erreichte Punkte (Grundkompetenzpunkte + Leitfragenpunkte)**
Sehr gut	7–10
Gut	6
Befriedigend	5
Genügend	4

Aufgabe 1

Wasserbehälter

Der *Grand Central Water Tower* (Südafrika) ist ein Behälter für die Wasserversorgung.
Er hat annähernd die Form eines auf der Spitze stehenden Kegels mit dem Radius r, der Höhe h und dem Winkel α an der Spitze (siehe nachstehende Abbildung).



Bildquelle: NJR ZA – eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/bb/Johhanesburg_Water-Midrand_Tower-001.jpg [11.01.2021] (adaptiert).

Aufgabenstellung:

– Stellen Sie mithilfe von r und h eine Formel zur Berechnung des Winkels α auf.

α = ____

Leitfrage:

Der *Grand Central Water Tower* soll durch einen neuen kegelförmigen Wasserbehälter ersetzt werden.
Der Radius dieses neuen Wasserbehälters soll doppelt so groß wie der Radius des *Grand Central Water Tower* sein, die Höhe soll gleich groß sein.

– Weisen Sie nach, dass das Volumen des neuen Wasserbehälters <u>nicht</u> doppelt so groß wie das Volumen des *Grand Central Water Tower* ist.

Lösung zur Aufgabe 1

Wasserbehälter

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{h}$

$\Rightarrow \quad \alpha = 2 \cdot \arctan\left(\frac{r}{h}\right)$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Formel richtig aufgestellt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$

neuer Wasserbehälter:
$V_1 = \frac{(2 \cdot r)^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{4 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = 4 \cdot V$
Das Volumen des neuen Wasserbehälters ist also nicht doppelt so groß.

Auch ein Nachweis mit konkreten Zahlen ist als richtig zu werten.

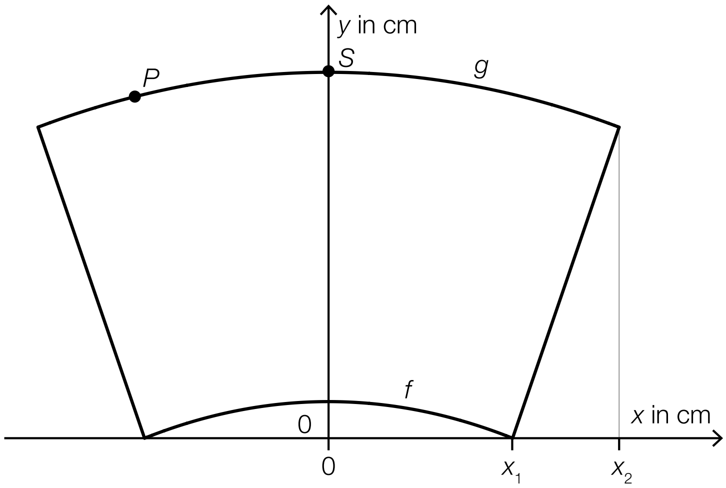
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn nachgewiesen wird, dass das Volumen nicht doppelt so groß ist.

Aufgabe 2

Kinderhocker

Die nachstehende modellhafte Abbildung zeigt die zur y-Achse symmetrische Sitzfläche eines Kinderhockers in der Ansicht von oben.



Aufgabenstellung:

Die obere Begrenzungslinie der Sitzfläche wird durch den Graphen der quadratischen Funktion g beschrieben. Der Graph von g verläuft durch den Scheitelpunkt $S = (0|20)$ und den Punkt $P = (-10|18)$.

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion g auf.

Leitfrage:

– Stellen Sie einen Ausdruck zur Berechnung des Flächeninhalts der Sitzfläche auf.

Lösung zur Aufgabe 2

Kinderhocker

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$g(x) = a \cdot x^2 + b$

$g(0) = 20$
$g(-10) = 18$

oder:

$b = 20$
$a \cdot (-10)^2 + b = 18$

$a = -\frac{1}{50}$
$g(x) = -\frac{1}{50} \cdot x^2 + 20$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Gleichung der Funktion g richtig aufgestellt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$2 \cdot \left(\int_0^{x_2} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{g(x_2) \cdot (x_2 - x_1)}{2}\right)$$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Ausdruck richtig aufgestellt wird.

Aufgabe 3

Pflanzenwachstum

Aufgabenstellung:

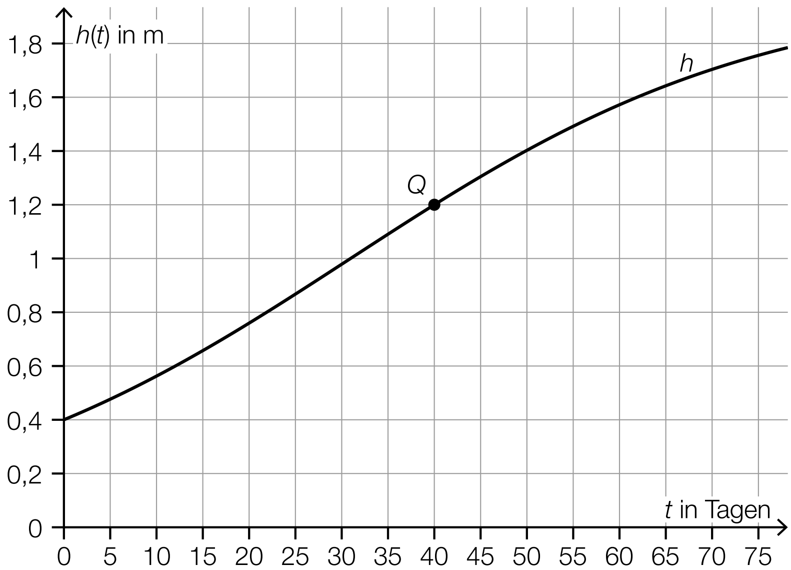
Für eine bestimmte Pflanze gilt:
Zu Beginn der Beobachtung ($t = 0$) beträgt das Höhenwachstum 0,03 Meter pro Tag.
Das Höhenwachstum nimmt pro Tag um 4 % ab.

Das Höhenwachstum soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Tagen durch die Exponentialfunktion v beschrieben werden.

– Stellen Sie eine Gleichung der Exponentialfunktion v auf. Wählen Sie $t = 0$ für den Beginn der Beobachtung.

Leitfrage:

In der nachstehenden Abbildung ist die Höhe einer anderen Pflanze in Abhängigkeit von der Zeit t durch den Graphen der Funktion h modellhaft dargestellt.



– Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung näherungsweise die Steigung der Tangente an den Graphen von h im Punkt Q.

Lösung zur Aufgabe 3

Pflanzenwachstum

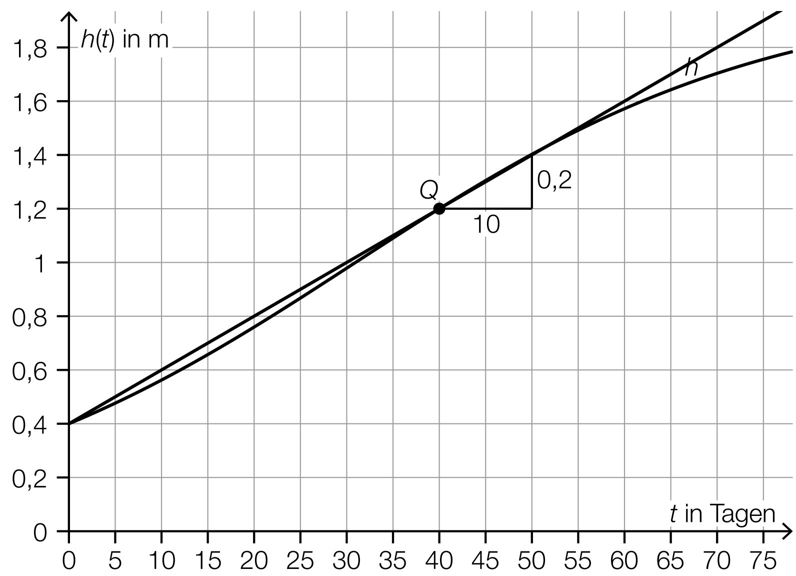
Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$v(t) = 0{,}03 \cdot 0{,}96^t$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Gleichung richtig aufgestellt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:



Steigung: $\frac{0{,}2}{10} = 0{,}02$
Toleranzintervall: [0,017; 0,023]

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Steigung richtig ermittelt wird.

Aufgabe 4

Polynomfunktion 3. Grades

Gegeben ist die Polynomfunktion 3. Grades f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x$ mit $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$.

Der Differenzenquotient von f hat im Intervall $[1; 4]$ den Wert 14.

Aufgabenstellung:

– Stellen Sie eine Gleichung zur Berechnung von b in Abhängigkeit von a auf.

Leitfrage:

– Ermitteln Sie diejenigen Werte von a, für die die Funktion nur eine reelle Nullstelle hat.

Lösung zur Aufgabe 4

Polynomfunktion 3. Grades

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = 14 \quad \Rightarrow \quad 64 \cdot a + 4 \cdot b - (a + b) = 42 \quad (\Rightarrow \quad b = 14 - 21 \cdot a)$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Gleichung richtig aufgestellt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x$

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (a \cdot x^2 + b) = 0$

$x_1 = 0;\ x_{2,3} = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$

$-\frac{b}{a} = -\frac{14 - 21 \cdot a}{a} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad a \leq \frac{2}{3}$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Werte von a richtig ermittelt werden.

Aufgabe 5

Glücksrad

Aufgabenstellung:

Die 5 Sektoren eines bestimmten Glücksrads sind mit den Buchstaben A, B, C, D bzw. E beschriftet.

Für jeden der 4 Sektoren A, B, C, D des Glücksrads ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger nach einer Drehung auf ihn zeigt, gleich groß.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger nach dem Drehen auf den Sektor mit dem Buchstaben E zeigt, beträgt bei jeder Drehung p.

Das Glücksrad wird 1-mal gedreht.

– Stellen Sie mithilfe von p einen Term zur Berechnung der nachstehenden Wahrscheinlichkeit auf.

P(„der Zeiger zeigt auf den Sektor mit dem Buchstaben A“) = ______________________________

Leitfrage:

Ein anderes Glücksrad ist in 5 gleich große Sektoren unterteilt.

Für jeden der 5 Sektoren des Glücksrads ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger nach einer Drehung auf ihn zeigt, gleich groß.

Eine Person tippt vor der Drehung des Glücksrads auf 1 der 5 Sektoren.

Für einen Tipp beim 1-maligen Drehen dieses Glücksrads muss ein Einsatz von € 2 gezahlt werden. Bei einem richtigen Tipp werden € 9 ausbezahlt.

– Berechnen Sie den Erwartungswert des Gewinns für diese Person.

Lösung zur Aufgabe 5

Glücksrad

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

P(„der Zeiger zeigt auf den Sektor mit dem Buchstaben A“) = $\frac{1-p}{4}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Term richtig aufgestellt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$\frac{4}{5} \cdot (-2) + \frac{1}{5} \cdot (9 - 2) = -0{,}2$

Der Erwartungswert des Gewinns beträgt € −0,2.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Erwartungswert des Gewinns richtig berechnet wird.