

# Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur  
standardisierten kompetenzorientierten  
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Haupttermin 2021

## Mathematik

Kompensationsprüfung 3  
Angabe für **Prüfer/innen**

# Hinweise zur standardisierten Durchführung der Kompensationsprüfung

Die vorliegende Angabe zur Kompensationsprüfung umfasst fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind. Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: „Aufgabenstellung“ und „Leitfrage“.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Die Verwendung der vom zuständigen Regierungsmitglied für die Klausurarbeit freigegebenen Formelsammlung für die SRP in Mathematik ist erlaubt. Weiters ist die Verwendung von elektronischen Hilfsmitteln (z.B. grafikfähiger Taschenrechner oder andere entsprechende Technologie) erlaubt, sofern keine Kommunikationsmöglichkeit (z.B. via Internet, Intranet, Bluetooth, Mobilfunknetze etc.) gegeben ist und der Zugriff auf Eigendateien im elektronischen Hilfsmittel nicht möglich ist.

Nach der Prüfung sind alle Unterlagen (Prüfungsaufgaben, Arbeitsblätter etc.) der Kandidatinnen und Kandidaten einzusammeln. Die Prüfungsunterlagen (Prüfungsaufgaben, Arbeitsblätter, produzierte digitale Arbeitsdaten etc.) dürfen erst nach dem für die Kompensationsprüfung vorgesehenen Zeitfenster öffentlich werden.

## Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Der nachstehende Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Kandidat/in 1		Kandidat/in 2		Kandidat/in 3		Kandidat/in 4		Kandidat/in 5	
Aufgabe 1										
Aufgabe 2										
Aufgabe 3										
Aufgabe 4										
Aufgabe 5										
<b>gesamt</b>										

## Erläuterungen zur Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist bei jeder Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und bei jeder Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

### Beurteilungsschlüssel für die Kompensationsprüfung

Note	erreichte Punkte (Grundkompetenzpunkte + Leitfragenpunkte)
Sehr gut	7–10
Gut	6
Befriedigend	5
Genügend	4

# Aufgabe 1

## Lagebeziehung von Geraden

Gegeben sind die drei Geraden

$$f: X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

$$g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ a \\ -2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

$$h: X = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Es gilt:  $a, b, c \in \mathbb{R}$

### Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie  $a$  und  $b$  so, dass die Geraden  $f$  und  $g$  identisch sind.

### Leitfrage:

Der Punkt  $F = (-1 | 2 | 2)$  liegt auf der Geraden  $f$ . Der Punkt  $H = (1 | c | 2)$  liegt auf der Geraden  $h$ .

Die Geraden  $f$  und  $h$  schneiden einander, wenn  $\overrightarrow{FH} = u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit  $u, v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt.

– Ermitteln Sie  $c$  so, dass die Geraden  $f$  und  $h$  einander schneiden.

# Lösung zur Aufgabe 1

## Lagebeziehung von Geraden

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -4 \\ a \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow b = 3$$

oder:

Damit  $f$  und  $g$  identisch sind, müssen die Vektoren  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -4 \\ a \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ b-2 \end{pmatrix}$  parallel sein.

$$\Rightarrow a = 2, b = 3$$

**Lösungsschlüssel:**

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn  $a$  und  $b$  richtig ermittelt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ c-2 \\ 0 \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2 = 2 \cdot u + v$$

$$c - 2 = -u + 2 \cdot v$$

$$0 = u + v$$

$$\Rightarrow u = 2, v = -2$$

$$\Rightarrow c = -4$$

**Lösungsschlüssel:**

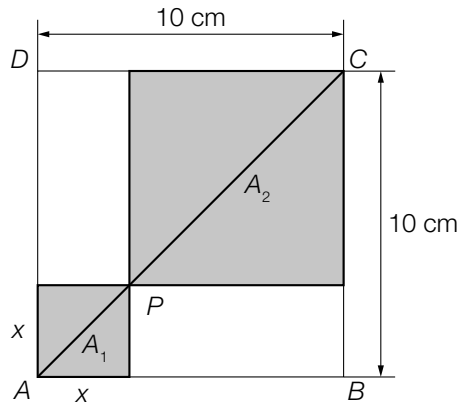
Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn  $c$  richtig ermittelt wird.

## Aufgabe 2

### Quadrate

Gegeben ist das Quadrat  $ABCD$  mit der Seitenlänge 10 cm. Auf der Diagonalen  $AC$  wird ein Punkt  $P$  gewählt. Durch  $P$  werden Parallele zu den Quadratseiten gelegt, wodurch zwei kleinere Quadrate mit den Flächeninhalten  $A_1$  und  $A_2$  entstehen. (Siehe nachstehende Abbildung.)

Eines dieser beiden kleineren Quadrate hat die Seitenlänge  $x$  (in cm).



Die Funktion  $A: (0; 10) \rightarrow \mathbb{R}$  ordnet jeder Seitenlänge  $x$  die Summe  $A_1 + A_2$  zu ( $x$  in cm,  $A(x)$  in  $\text{cm}^2$ ).

#### Aufgabenstellung:

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung von  $A$  auf.

#### Leitfrage:

Die Funktion  $A$  hat die Minimumstelle  $x_{\min}$ .

– Berechnen Sie  $x_{\min}$  und bestimmen Sie  $k \in \mathbb{R}^+$  so, dass  $A_2 = k \cdot A_1$  gilt.

## Lösung zur Aufgabe 2

### Quadrate

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$A(x) = x^2 + (10 - x)^2$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Funktionsgleichung von  $A$  richtig aufgestellt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$A'(x) = 4 \cdot x - 20$$

$$A'(x_{\min}) = 0 \Rightarrow x_{\min} = 5$$

$$A_1 = 25, A_2 = 25 \Rightarrow k = 1$$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn  $x_{\min}$  richtig berechnet und  $k$  richtig bestimmt wird.

## Aufgabe 3

### Brücke

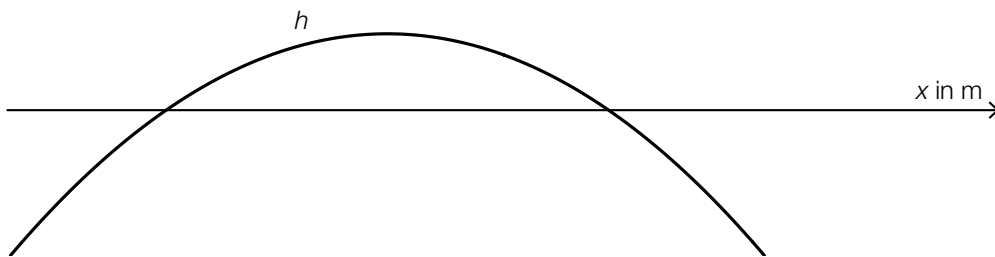
Zur Modellierung von Brückenbögen werden oft quadratische Funktionen verwendet.

#### Aufgabenstellung:

- Beschreiben Sie, was allgemein über die Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen von quadratischen Funktionen ausgesagt werden kann.

#### Leitfrage:

Der Brückenbogen einer bestimmten Autobahn-Brücke kann durch die Funktion  $h$  mit  $h(x) = -\frac{1}{800} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x$  ( $x, h(x)$  in m) modelliert werden. Dazu wird ein Koordinatensystem so festgelegt, dass die Fahrbahn durch die  $x$ -Achse dargestellt wird. (Siehe nachstehende Abbildung.)



- Berechnen Sie die Nullstellen von  $h$ .
- Zeichnen Sie die senkrechte Koordinatenachse in die obige Abbildung ein.

Für ein  $x_1 \in \mathbb{R}$  gilt:  $h'(x_1) = 0$ .

- Interpretieren Sie  $h(x_1)$  im gegebenen Sachzusammenhang.



## Lösung zur Aufgabe 3

### Brücke

#### Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

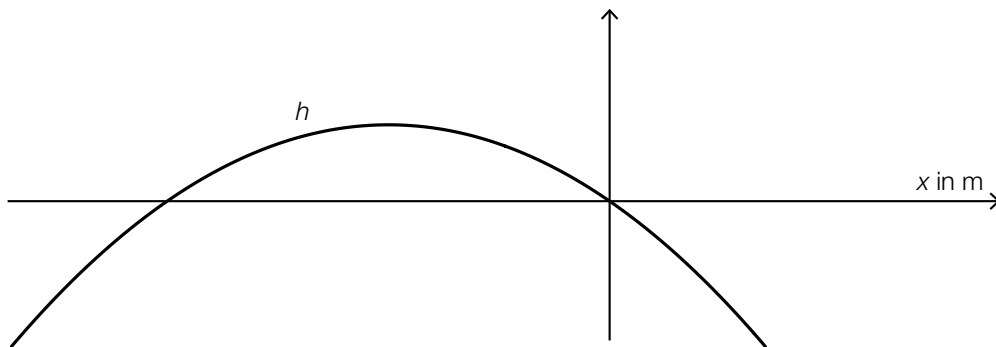
Quadratische Funktionen haben immer genau 1 Extremstelle und keine Wendestelle.  
Die Anzahl der Nullstellen ist höchstens 2.

#### Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen richtig beschrieben wird.

#### Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Lösungen der Gleichung  $h(x) = 0$  sind: 0 und  $-400$ .



$h(x_1)$  beschreibt die größte Höhe des Brückenbogens (über dem Fahrbahnniveau).

#### Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Nullstellen von  $h$  richtig berechnet werden, die senkrechte Koordinatenachse richtig eingezeichnet wird und  $h(x_1)$  im gegebenen Sachzusammenhang richtig interpretiert wird.

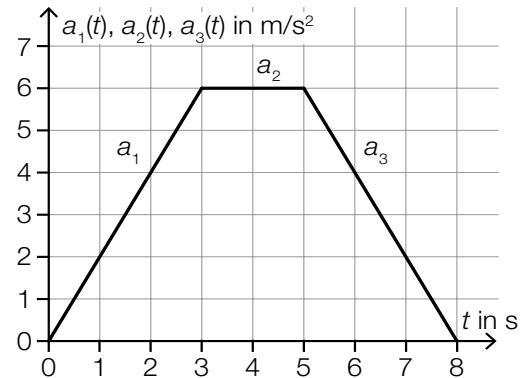
# Aufgabe 4

## Bewegung eines Fahrzeugs

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  beginnt ein Fahrzeug aus dem Stillstand zu beschleunigen und bewegt sich anschließend auf einer geradlinigen Straße.

Die Beschleunigung dieses Fahrzeugs in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  wird im Zeitintervall  $[0; 8]$  durch die linearen Funktionen  $a_1: [0; 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a_2: [3; 5] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a_3: [5; 8] \rightarrow \mathbb{R}$  modelliert ( $t$  in s;  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ ,  $a_3(t)$  in  $\text{m/s}^2$ ).

In der nebenstehenden Abbildung sind die Graphen von  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  dargestellt.



### Aufgabenstellung:

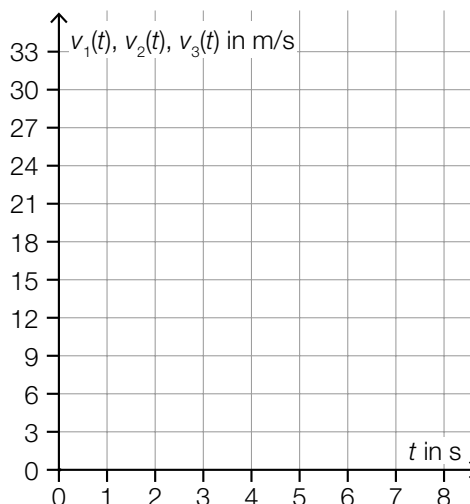
Die Graphen der Funktionen  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  und die  $t$ -Achse schließen ein Flächenstück ein.

- Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.
- Interpretieren Sie den Inhalt dieses Flächenstücks im gegebenen Sachzusammenhang.

### Leitfrage:

Die Geschwindigkeit dieses Fahrzeugs in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  wird im Zeitintervall  $[0; 8]$  durch die Funktionen  $v_1: [0; 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v_2: [3; 5] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $v_3: [5; 8] \rightarrow \mathbb{R}$  beschrieben ( $t$  in s;  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$ ,  $v_3(t)$  in  $\text{m/s}$ ).

- Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem die Graphen von  $v_1$ ,  $v_2$  und  $v_3$  unter Verwendung der Werte an den Intervallgrenzen.



## Lösung zur Aufgabe 4

### Bewegung eines Fahrzeugs

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$\text{Inhalt des Flächenstücks: } \frac{3 \cdot 6}{2} + 2 \cdot 6 + \frac{3 \cdot 6}{2} = 30$$

oder:

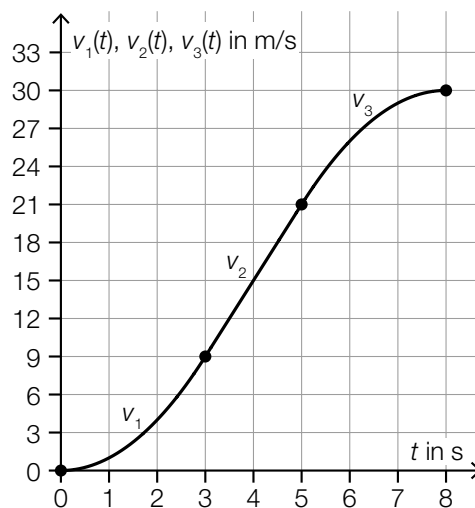
$$\text{Inhalt des Flächenstücks: } \frac{2+8}{2} \cdot 6 = 30$$

Nach 8 s beträgt die Geschwindigkeit des Fahrzeugs 30 m/s.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Inhalt des Flächenstücks richtig berechnet und interpretiert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:



Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Graphen richtig skizziert werden. Dabei muss klar erkennbar sein, dass

- $v_1$  vom Punkt  $(0|0)$  zum Punkt  $(3|9)$  verläuft und positiv gekrümmt ist,
- $v_2$  vom Punkt  $(3|9)$  zum Punkt  $(5|21)$  verläuft und linear ist,
- $v_3$  vom Punkt  $(5|21)$  zum Punkt  $(8|30)$  verläuft und negativ gekrümmt ist.

## Aufgabe 5

### Münzwurf

Bei einem Münzwurf zeigt eine Münze mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder „Kopf“ oder „Zahl“, unabhängig von anderen Würfeln.

#### Aufgabenstellung:

Die Münze wird 2-mal hintereinander geworfen und es wird jeweils das Ergebnis („Kopf“ oder „Zahl“) notiert.

– Geben Sie alle möglichen Versuchsausgänge und deren jeweilige Wahrscheinlichkeit an.

#### Leitfrage:

Die Münze wird 5-mal hintereinander geworfen. Die Zufallsvariable  $X$  gibt die Anzahl derjenigen Würfe an, bei denen die Münze „Zahl“ zeigt.

– Begründen Sie, warum die Zufallsvariable  $X$  binomialverteilt ist.

– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Münze bei mehr als 3 Würfeln „Zahl“ zeigt.

## Lösung zur Aufgabe 5

### Münzwurf

#### Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Versuchsausgänge: („Kopf“, „Kopf“), („Kopf“, „Zahl“), („Zahl“, „Kopf“) und („Zahl“, „Zahl“)  
Jeder dieser Versuchsausgänge hat eine Wahrscheinlichkeit von 25 %.

#### Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn alle möglichen Versuchsausgänge und deren jeweilige Wahrscheinlichkeit angegeben werden.

#### Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Zufallsvariable  $X$  ist binomialverteilt, da gilt:

- Es gibt bei jedem Wurf genau zwei mögliche Versuchsausgänge.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze bei einem Wurf „Kopf“ bzw. „Zahl“ zeigt, ist konstant.
- Die 5 Würfe erfolgen unabhängig voneinander.

$$P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) = 0,1875 = 18,75 \%$$

#### Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn mindestens 2 der 3 Gründe genannt werden und die Wahrscheinlichkeit richtig ermittelt wird.