MATHAGO

Hausübung

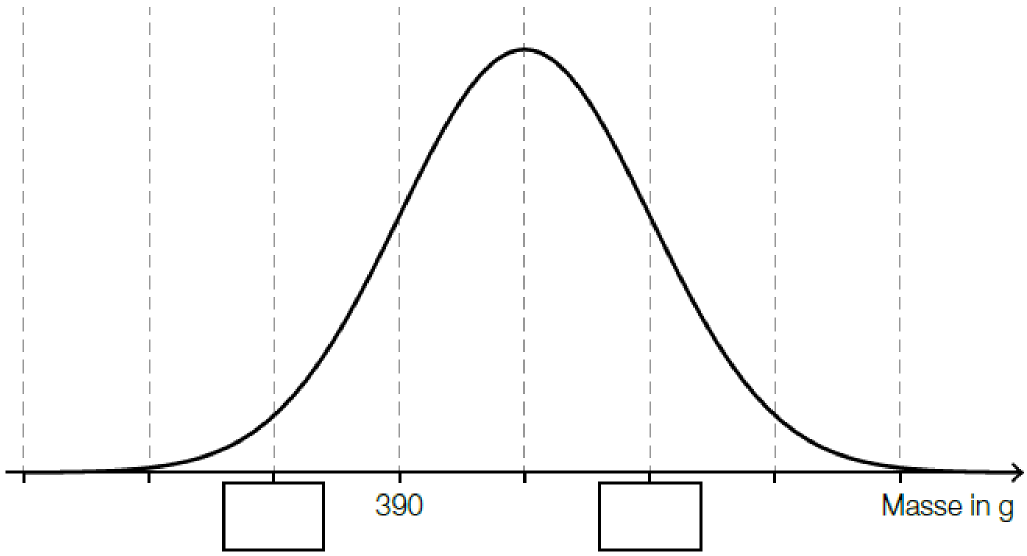
Normalverteilung

Aufgabe 1

Die Masse der Bauteile wird als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 400$ g und der Standardabweichung $\sigma = 10$ g angenommen.

– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse eines zufällig ausgewählten Bauteils um mehr als 12 g vom Erwartungswert abweicht. (B)

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Dichtefunktion für die Masse der Bauteile dargestellt.



– Tragen Sie die fehlenden Werte in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. (R)

Aufgabe 2

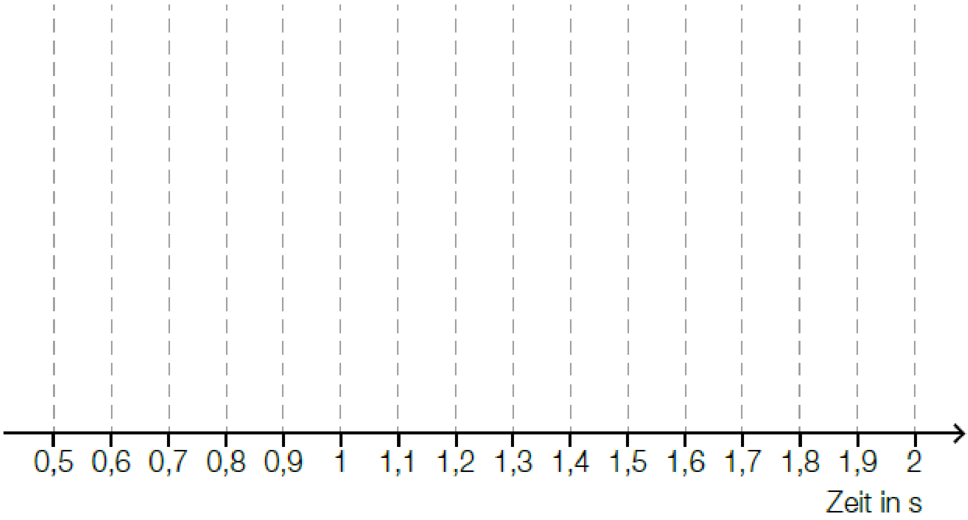
Die Länge X der Stiele einer bestimmten Tulpensorte ist näherungsweise normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 25$ cm.
Max behauptet, dass man die Wahrscheinlichkeit $P(X > 25)$ auch ohne Kenntnis der Standardabweichung bestimmen kann.

– Begründen Sie, warum diese Behauptung richtig ist. (R)

Aufgabe 3

Die Zeit zwischen dem Anfordern einer TAN und dem Erhalt der TAN auf dem Handy ist bei einer bestimmten Bank näherungsweise normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 1{,}2$ s und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}2$ s.

– Skizzieren Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen der zugehörigen Dichtefunktion. (B)



Die Verteilungsfunktion der normalverteilten Zufallsvariablen X, die die Zeit zwischen dem Anfordern und dem Erhalt einer TAN in Sekunden angibt, wird mit F bezeichnet.

– Beschreiben Sie ein Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit folgendermaßen berechnet wird:
$P(E) = F(1{,}6) - F(0{,}8)$ (R)

Aufgabe 4

Die Abfüllmenge X anderer Sandsäcke ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 25{,}0$ L.

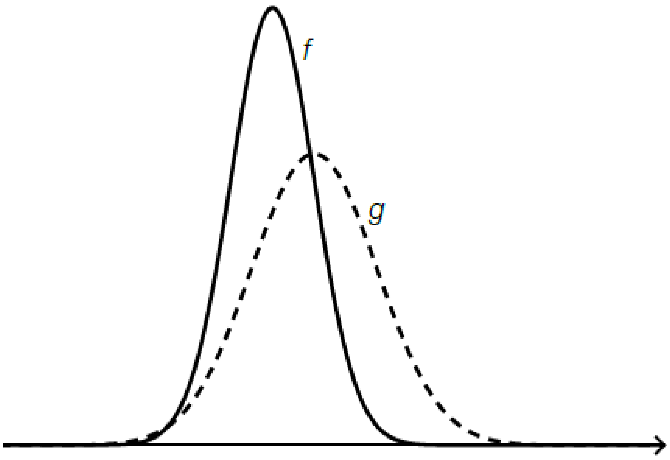
– Erklären Sie anhand einer Skizze der zugehörigen Dichtefunktion, dass gilt:
  $P(X < 24{,}5) = P(X > 25{,}5)$ (R)

Aufgabe 5

An der Bar des Casinos gibt es Getränke. Die Flüssigkeitsmenge in den Gläsern ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 110$ ml und der Standardabweichung $\sigma = 10$ ml.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Flüssigkeitsmenge in einem zufällig ausgewählten Glas mindestens 120 ml beträgt. (B)

In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Dichtefunktionen *f* und *g* zweier normalverteilter Zufallsvariablen dargestellt.



– Beschreiben Sie, wie sich die Erwartungswerte und die Standardabweichungen dieser beiden Zufallsvariablen voneinander unterscheiden. (R)

Aufgabe 6

Für Treffer werden Punkte vergeben.
Die Anzahl der bei einem Treffer erzielten Punkte ist für *Tuly* normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 8$ und der Standardabweichung $\sigma = 1{,}5$.

– Ermitteln Sie denjenigen um μ symmetrischen Bereich, in dem 80 % der bei einem Treffer von *Tuly* erzielten Punkte liegen. (B)

Aufgabe 7

Speisetopfen wird in Kunststoffbecher abgefüllt. Die Füllmenge der Kunststoffbecher ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 255$ g. In der nachstehenden Abbildung 1 ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion für diese Zufallsvariable X dargestellt.

Abbildung 1

Der Inhalt der in Abbildung 1 markierten Fläche entspricht einer Wahrscheinlichkeit p.

– Erstellen Sie mithilfe von p eine Formel zur Berechnung der folgenden Wahrscheinlichkeit:

$P(255 \leq X \leq 260) =$ ______________________________ (A)

Aufgabe 8

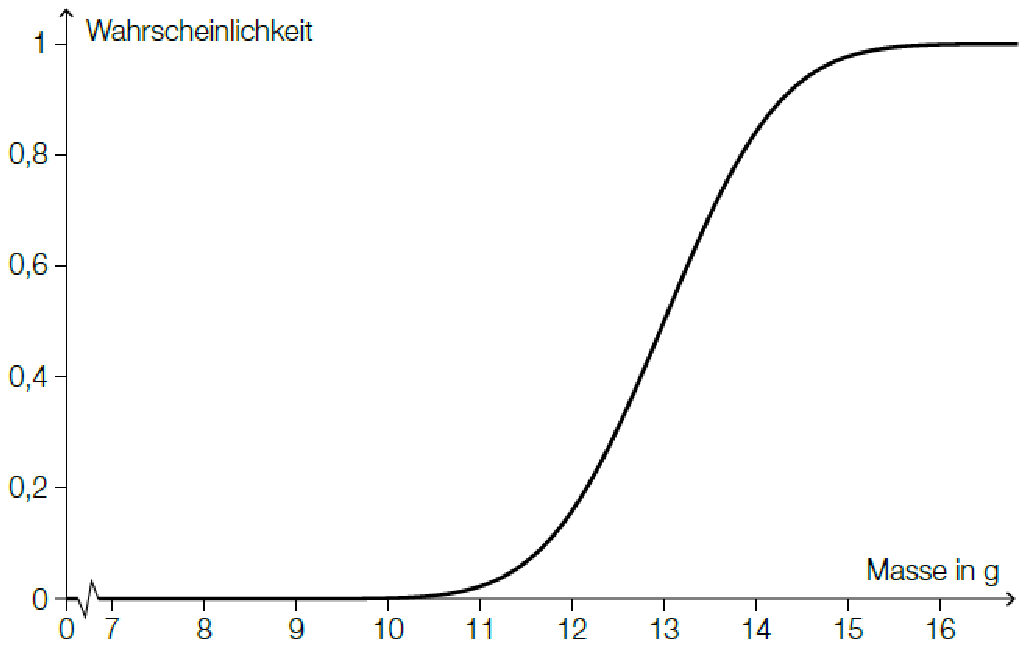
Eine Bäckerei stellt Kekse her. Die Masse der Kekse ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 13{,}0$ g und der Standardabweichung $\sigma = 1{,}0$ g.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig auswähltes Keks höchstens eine Masse von 11,5 g aufweist. (B)

– Ermitteln Sie denjenigen zum Erwartungswert μ symmetrischen Bereich, in dem die Masse eines zufällig ausgewählten Kekses mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % liegt. (B)

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Verteilungsfunktion der Masse der Kekse.

– Veranschaulichen Sie in dieser Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse eines zufällig ausgewählten Kekses zwischen 12 g und 14 g liegt. (A)



Aufgabe 9

Die Höhe der Pflanzen einer bestimmten Sorte ist näherungsweise normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 175$ cm und der Standardabweichung $\sigma = 5$ cm.

In Abbildung 1 ist mithilfe der zugehörigen Dichtefunktion die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ereignisses als grau markierte Fläche dargestellt.

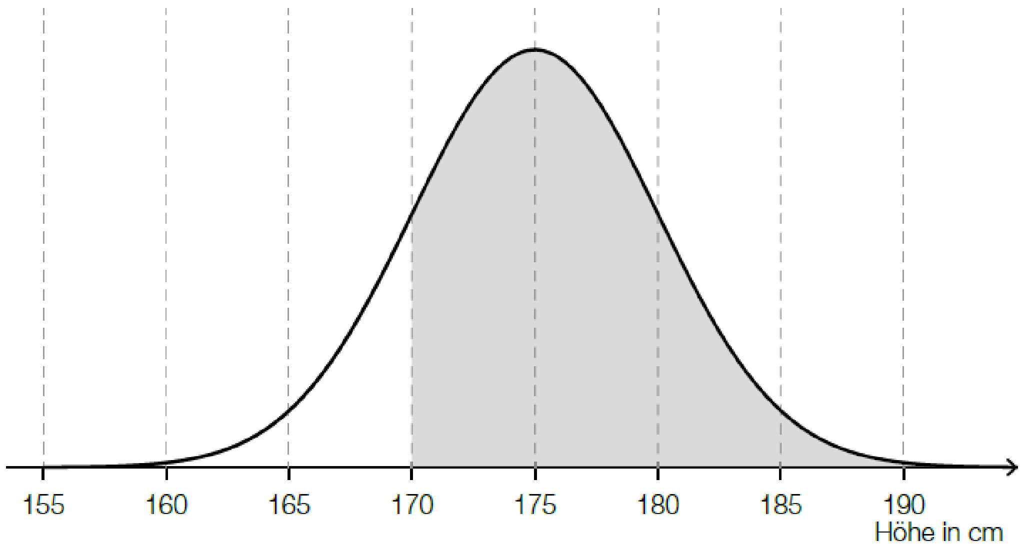


Abbildung 1

– Beschreiben Sie dieses Ereignis im gegebenen Sachzusammenhang mit der oben dargestellten Wahrscheinlichkeit. (R)

– Veranschaulichen Sie diese Wahrscheinlichkeit in der nachstehenden Abbildung 2 mithilfe des Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion F. (A)

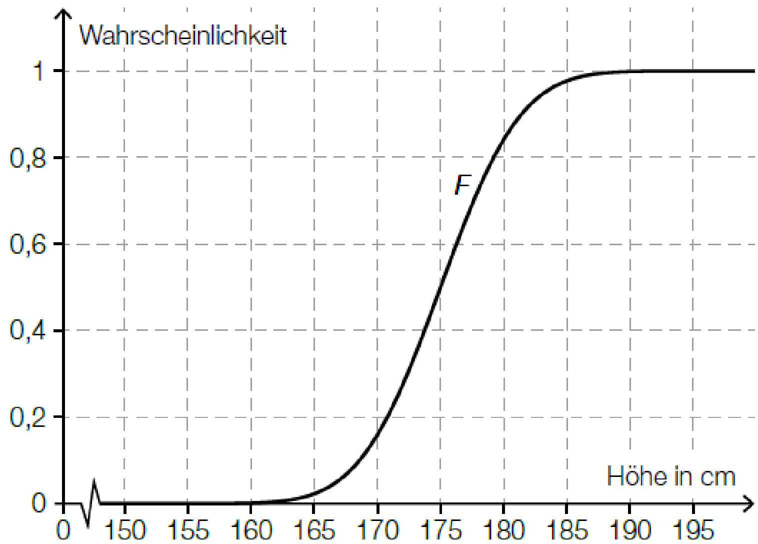


Abbildung 2

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Pflanze höher als 188 cm ist. (B)

– Beschreiben Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck für die oben dargestellte Verteilungsfunktion F im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

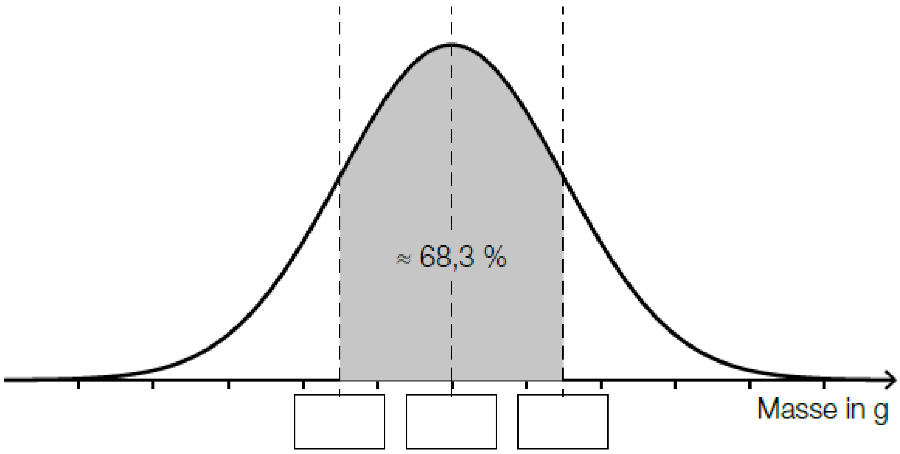
$F(180) - F(170)$ (R)

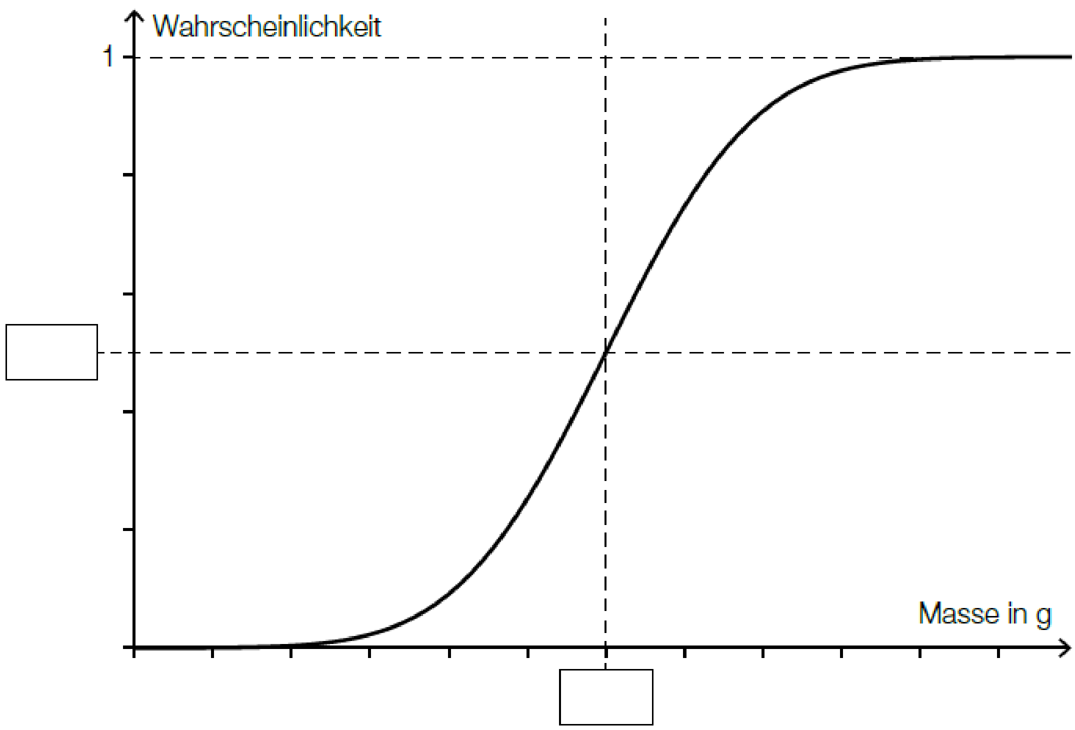
Aufgabe 10

Die Masse von Reispackungen einer bestimmten Sorte ist näherungsweise normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 1\,000$ g und der Standardabweichung $\sigma = 15$ g.

In den nachstehenden beiden Abbildungen sind der Graph der zugehörigen Dichtefunktion f bzw. der Graph der Verteilungsfunktion F dargestellt.

– Tragen Sie die entsprechenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. (A)





– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Reispackung dieser Sorte eine Masse von weniger als 980 g hat. (B)

– Beschreiben Sie ein Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet werden kann.

$P(E) = 1 - \int_{990}^{1010} f(x)\,\mathrm{d}x$ (R)

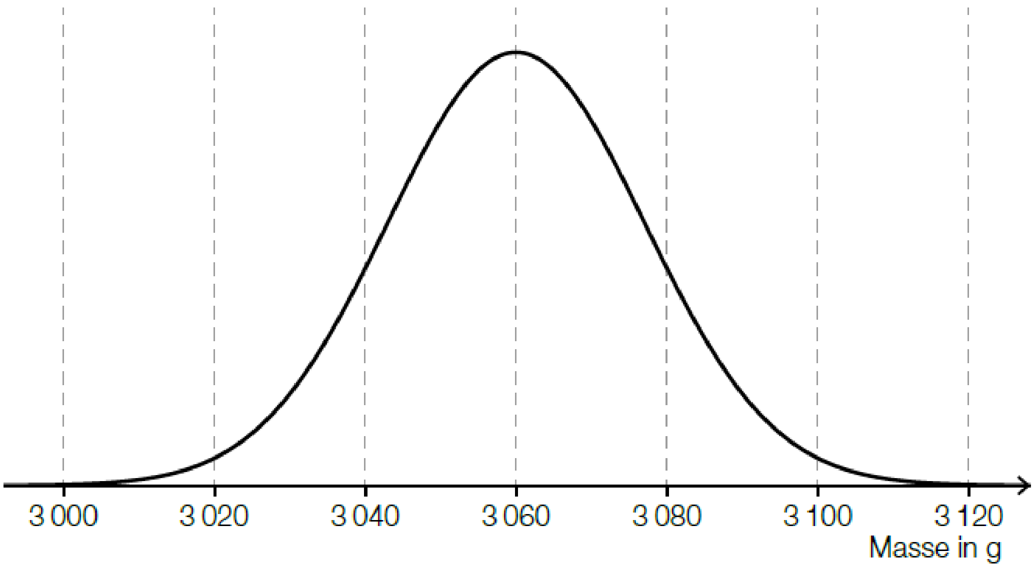
Aufgabe 11

Für den privaten Gebrauch kann Streusalz in kleinen Packungen gekauft werden.
Die Masse dieser Packungen wird dabei als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 3\,060$ g angenommen.
38 % dieser Packungen haben eine Masse zwischen 3 060 g und 3 080 g.

– Begründen Sie, warum 88 % aller Packungen eine Masse von höchstens 3 080 g haben. (R)

In der unten stehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.

– Veranschaulichen Sie in dieser Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Packung eine Masse von mindestens 3 040 g hat. (A)

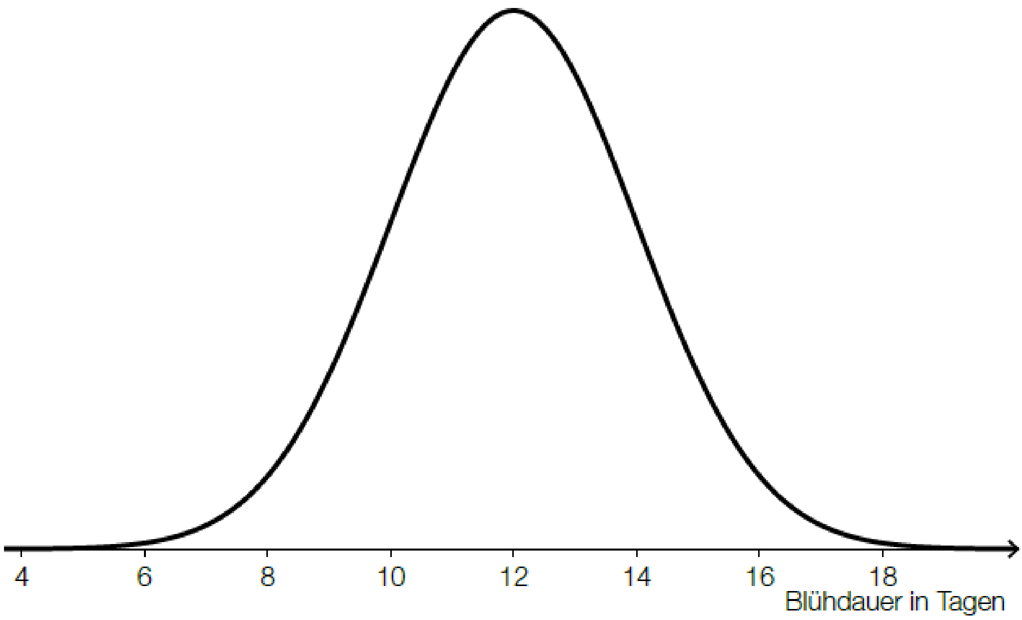


Aufgabe 12

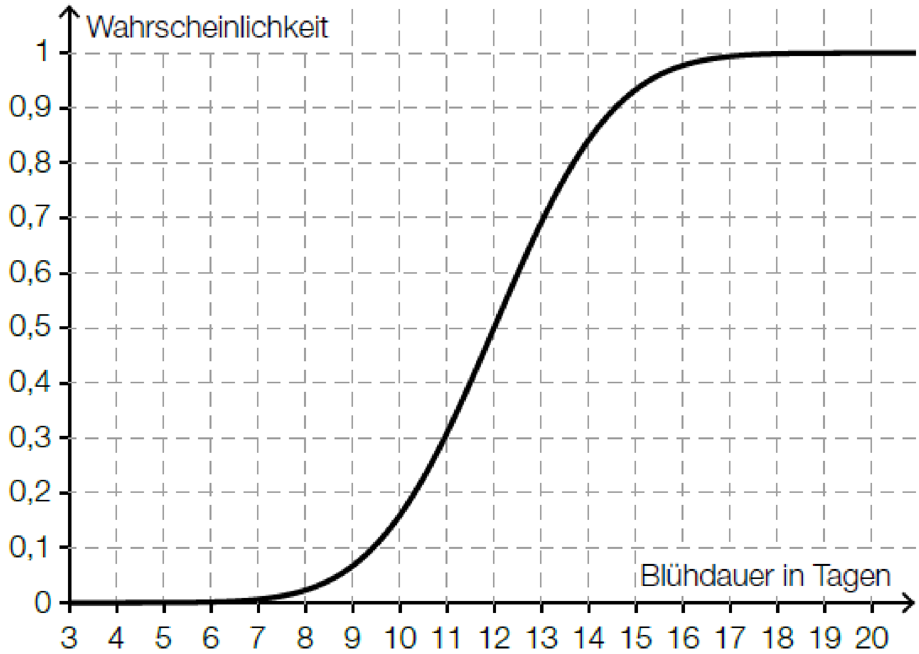
Die Blühdauer einer Nelkenart *A* ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 12$ Tage und der Standardabweichung $\sigma = 2$ Tage.

– Ermitteln Sie dasjenige um μ symmetrische Intervall, in dem die Blühdauer einer zufällig ausgewählten Nelke mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % liegt. (B)

– Veranschaulichen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 14)$ in der nachstehenden Abbildung des Graphen der zugehörigen Dichtefunktion. (A)



In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Verteilungsfunktion dargestellt.



– Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Nelke mindestens 11 Tage lang blüht. (A)

Aufgabe 13

Die Bauzeit für einen bestimmten Gebäudetyp kann näherungsweise als normalverteilt angenommen werden.

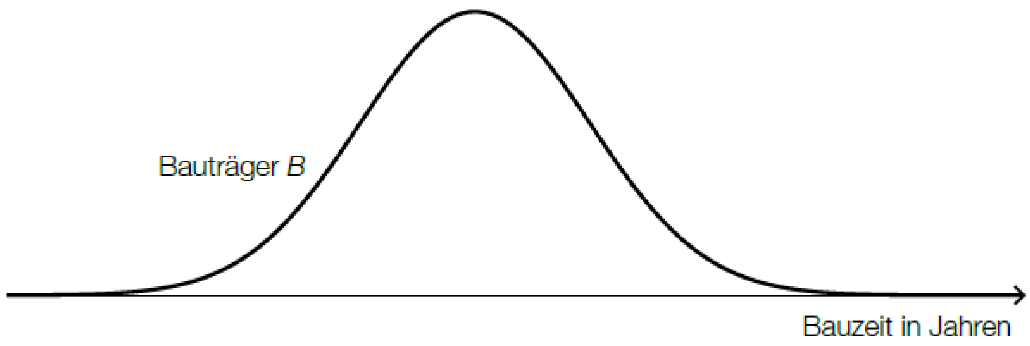
Bauträger *A* gibt an: Erwartungswert $\mu = 4$ Jahre, Standardabweichung $\sigma = 0{,}5$ Jahre

– Ermitteln Sie für Bauträger *A* die Wahrscheinlichkeit, dass die Bauzeit mehr als 5 Jahre beträgt. (B)

Bauträger *B* gibt an: Erwartungswert $\mu = 5$ Jahre, Standardabweichung $\sigma = 1$ Jahr

– Ermitteln Sie für Bauträger *B* diejenige Bauzeit, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % überschritten wird. (B)

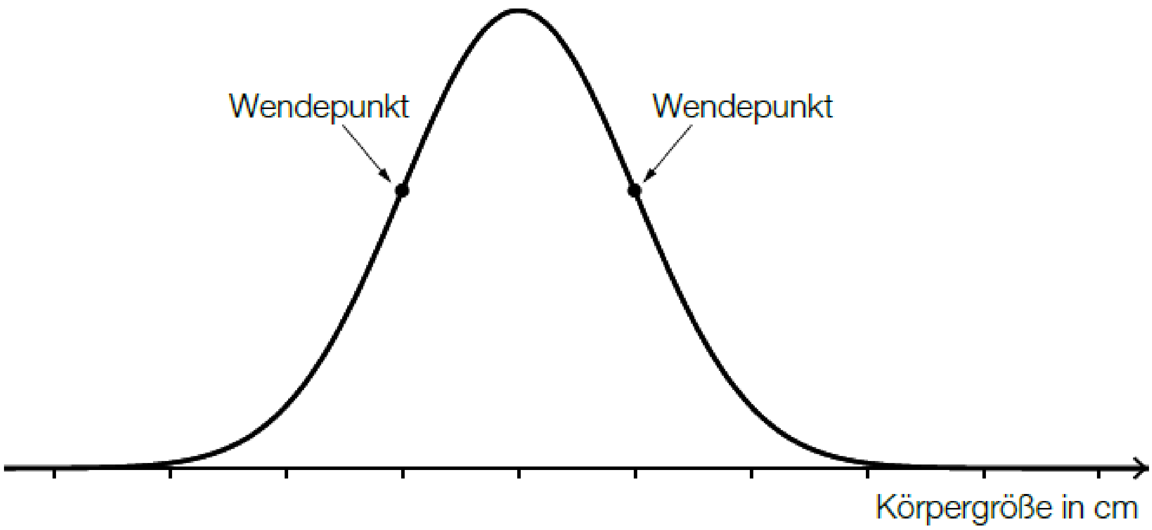
Bauträger *C* gibt für die Bauzeit einen höheren Erwartungswert, aber eine geringere Standardabweichung als Bauträger *B* an. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Dichtefunktion der Bauzeit laut den Angaben des Bauträgers *B* dargestellt.



– Zeichnen Sie in der obigen Abbildung einen zu den Angaben des Bauträgers *C* passenden Graphen der Dichtefunktion ein. (A)

Aufgabe 14

Entsprechend einer Studie ist die Körpergröße 9-jähriger Mädchen annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert von 135 cm und einer Standardabweichung von 5 cm. Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung den Erwartungswert und die Standardabweichung. (R)

Die 9-jährigen Mädchen sollen auf Basis ihrer Körpergröße in 3 Gruppen eingeteilt werden:

Alle, die größer als 140 cm sind, gehören zu einer Gruppe. Die Übrigen sollen so auf 2 Gruppen aufgeteilt werden, dass gleich viele Mädchen in diesen beiden Gruppen sind. (Das bedeutet: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes 9-jähriges Mädchen zu einer dieser beiden Gruppen gehört, soll für beide Gruppen gleich groß sein.)

– Berechnen Sie, bei welcher Körpergröße die Grenze zwischen den beiden Gruppen, die gleich viele 9-jährige Mädchen beinhalten, zu ziehen ist. (B)

Aufgabe 15

– Kreuzen Sie die falsche Aussage an. *[1 aus 5]*

Es werden die folgenden Bezeichnungen verwendet:

f ... Dichtefunktion der Normalverteilung
F ... zugehörige Verteilungsfunktion der Normalverteilung

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$	☐
Die Gleichung $f''(x) = 0$ hat zwei verschiedene Lösungen.	☐
Für immer größer werdende x nähert sich $F(x)$ dem Wert 1.	☐
$F(\mu + \sigma) = F(\mu - \sigma)$	☐
$\int_{-\infty}^{\mu} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mu}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$	☐