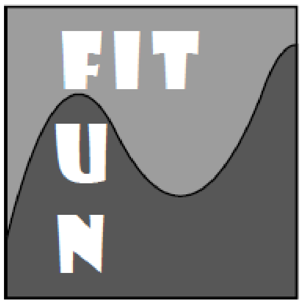
MATHAGO

Hausübung

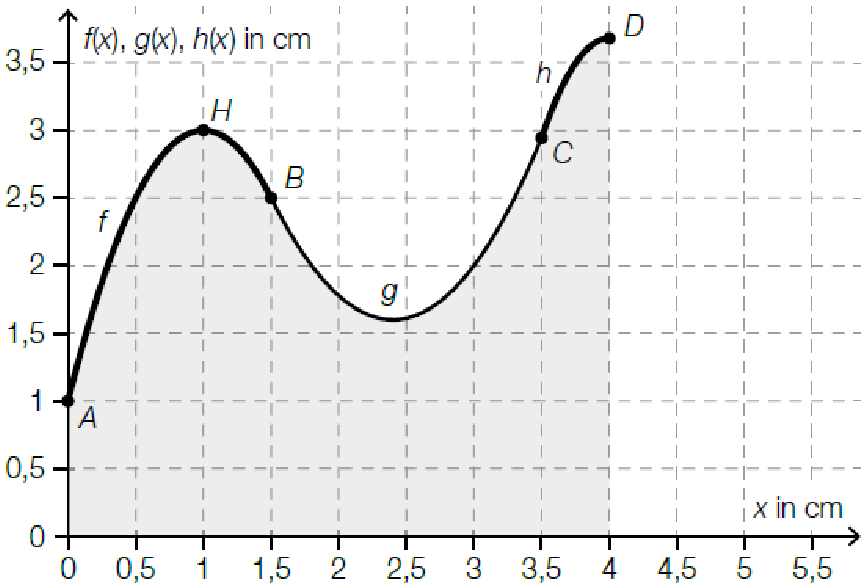
Integralrechnung

**Aufgabe 1**

Eine Grafikerin erstellt für eine Tourismusregion ein neues Logo für die Website.



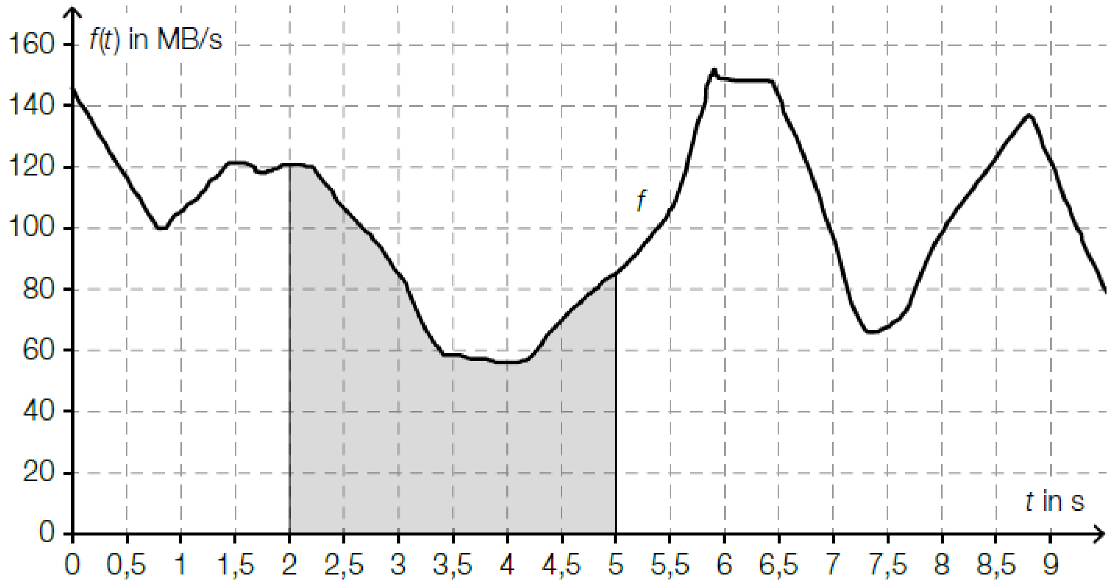

Die nachstehende Abbildung zeigt die obere Begrenzungslinie des Logos, die sich aus den Graphen der Funktionen *f* (zwischen den Punkten *A* und *B*), *g* (zwischen *B* und *C*) und *h* (zwischen *C* und *D*) zusammensetzt.




– Stellen Sie aus den Funktionen *f*, *g* und *h* eine Formel zur Berechnung des Inhalts *F* der grau markierten Fläche des Logos auf. (A)

**Aufgabe 2**

Jasmin löscht Dateien von der Festplatte ihres Laptops. Die Funktion $f$ beschreibt die Geschwindigkeit in Megabyte pro Sekunde (MB/s), mit der diese Daten gelöscht werden:

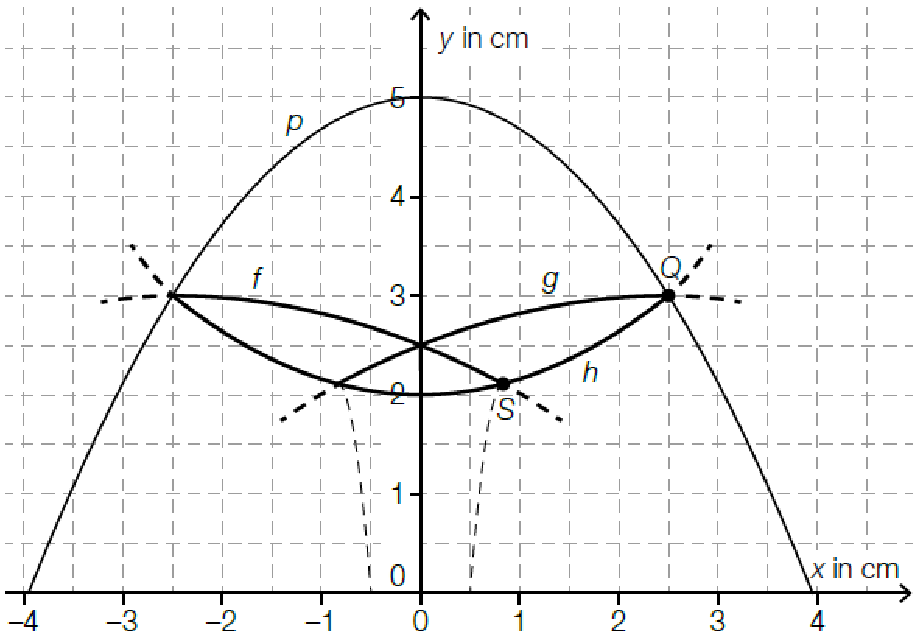



$t$ ... Zeit in s
$f(t)$ ... Geschwindigkeit, mit der die Daten zur Zeit $t$ gelöscht werden, in MB/s

– Beschreiben Sie die Bedeutung des Inhalts der in der obigen Abbildung grau markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die entsprechende Einheit an. (R)

**Aufgabe 3**

In der nachstehenden Abbildung ist das Logo eines Vereins in einem Koordinatensystem dargestellt.




Das Logo ist symmetrisch zur $y$-Achse.

– Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Fläche, deren Inhalt $A$ folgendermaßen berechnet werden kann:

$A = 2 \cdot \left(\int_0^{2,5} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{2,5} h(x)\,\mathrm{d}x\right)$ (R)

**Aufgabe 4**

In der nachstehenden Abbildung 1 ist die momentane Änderungsrate des Wasservolumens im Zwischenspeicher für ein bestimmtes Zeitintervall dargestellt.

Abbildung 1

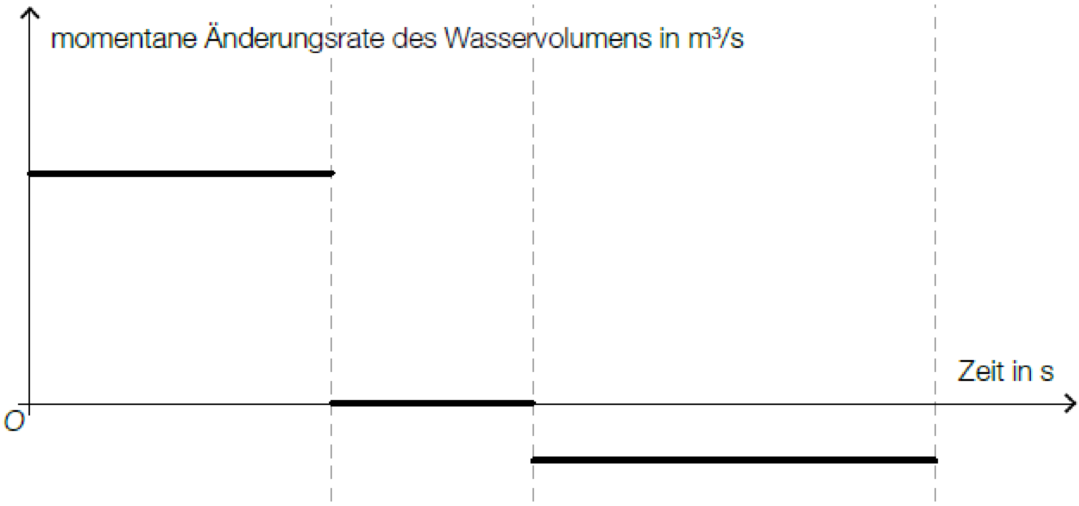
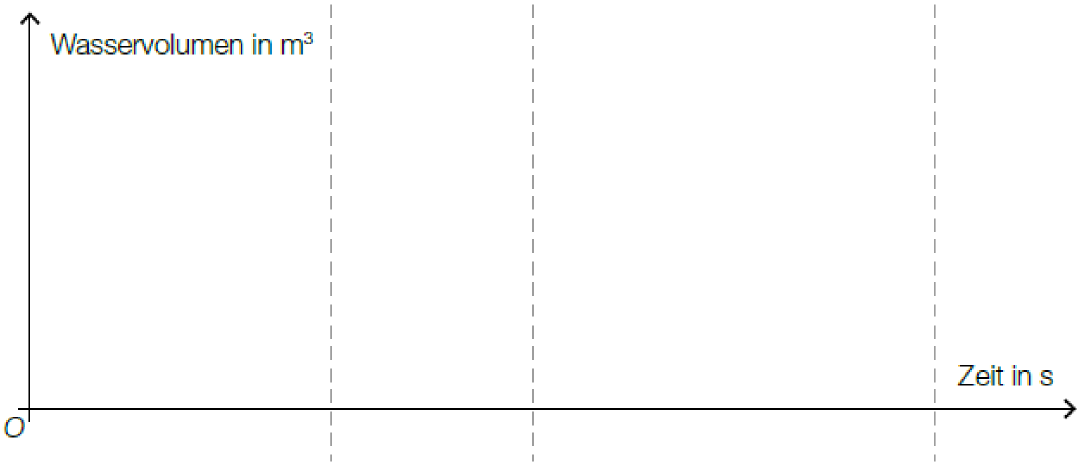



Abbildung 2

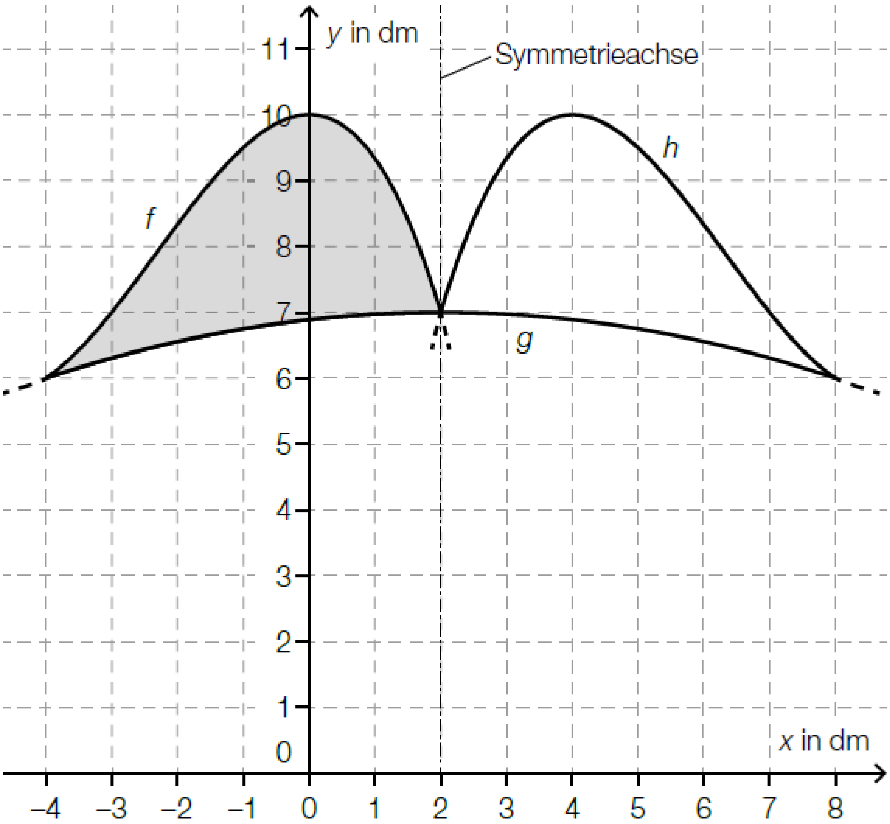



Der Zwischenspeicher ist zu Beginn ($t = 0$) leer.

– Skizzieren Sie in der obigen Abbildung 2 den Graphen derjenigen Funktion, die das Wasservolumen im Zwischenspeicher in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. (A)

**Aufgabe 5**

In der nachstehenden Abbildung wurden die beiden zueinander symmetrischen „Flügel" der Skulptur mithilfe der Funktionen $f$, $g$ und $h$ modelliert.

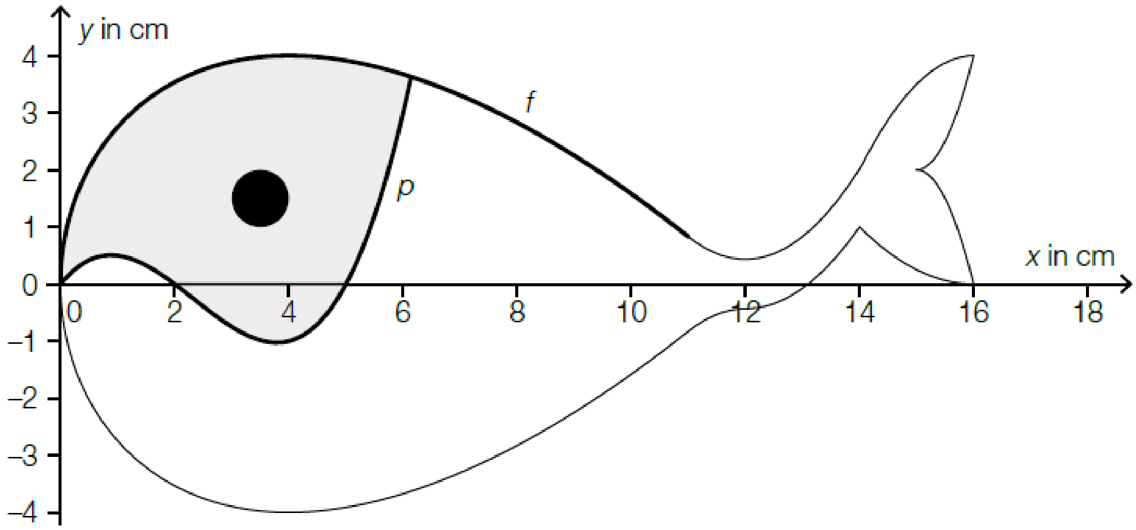



– Erstellen Sie mithilfe von $f$ und $g$ eine Formel zur Berechnung des Inhalts $A$ der in der obigen Abbildung grau markierten Fläche.

$A$ = ______________________________ (A)

**Aufgabe 6**

In der nachstehenden Abbildung ist modellhaft das Logo einer Kindergartengruppe, das die Form eines Wales hat, dargestellt.




Der Graph der Funktion $f$ und der Graph der Funktion $p$ schneiden einander an der Stelle $x = 0$ und an der Stelle $x = 6{,}1$. Das kreisrunde Walauge hat einen Durchmesser von 1 cm.

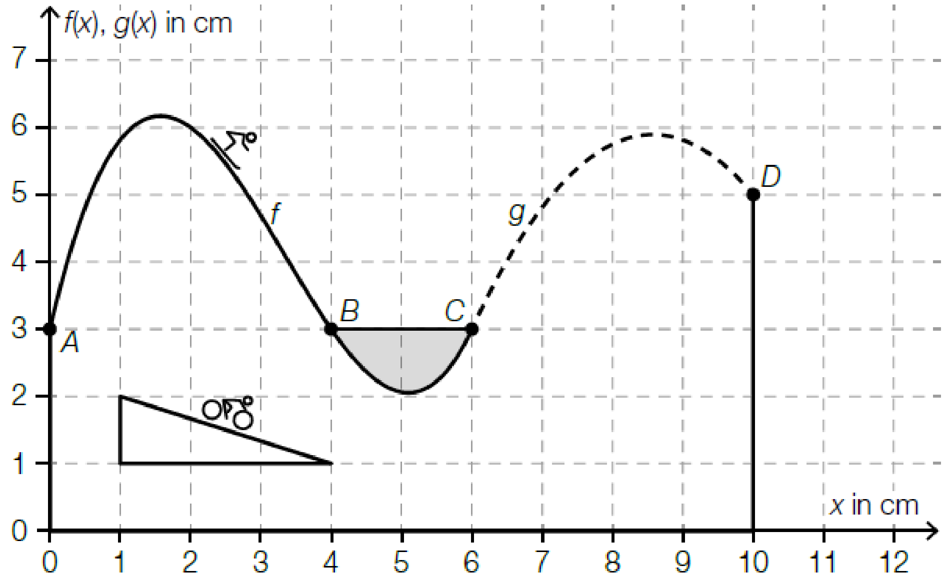
Die in der obigen Abbildung grau markierte Fläche soll eingefärbt werden. Das kreisrunde Walauge soll dabei <u>nicht</u> eingefärbt werden.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts $A$ derjenigen Fläche, die eingefärbt werden soll.

$A =$ ____________________________________ (A)

**Aufgabe 7**

Das Logo einer Ferienregion ist modellhaft in der nachstehenden Abbildung dargestellt.




Für die Funktionen *f* und *g* gilt:

$f(x) = \frac{3}{16} \cdot x^3 - \frac{15}{8} \cdot x^2 + \frac{9}{2} \cdot x + 3$ mit $0 \leq x \leq 6$

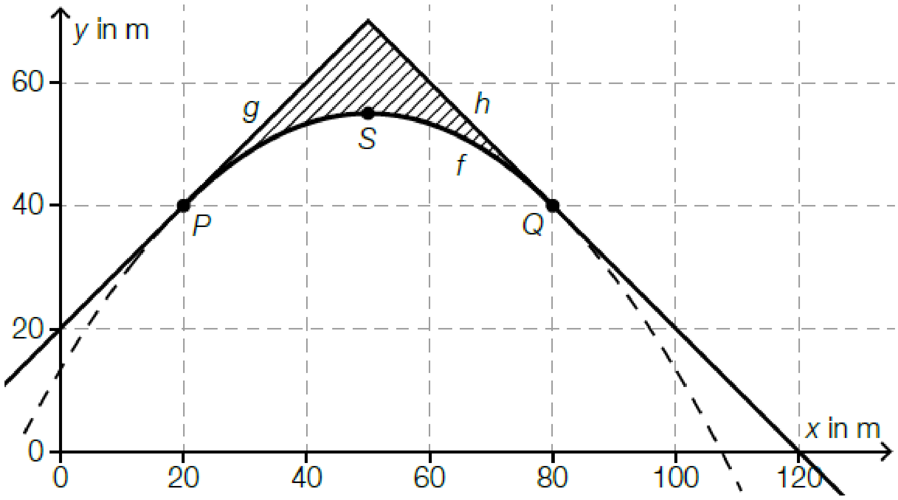
$g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $6 \leq x \leq 10$

$x$, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in cm

– Berechnen Sie den Inhalt der in der obigen Abbildung grau markierten Fläche. (B)

**Aufgabe 8**

Die nachstehende Abbildung zeigt eine durch die beiden linearen Funktionen $g$ und $h$ modellierte Straßenkreuzung. Der Verlauf der geplanten Umfahrungsstraße wird durch den Graphen der quadratischen Funktion $f$ mit dem Scheitelpunkt $S$ modelliert.




$x$, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ... Koordinaten in m

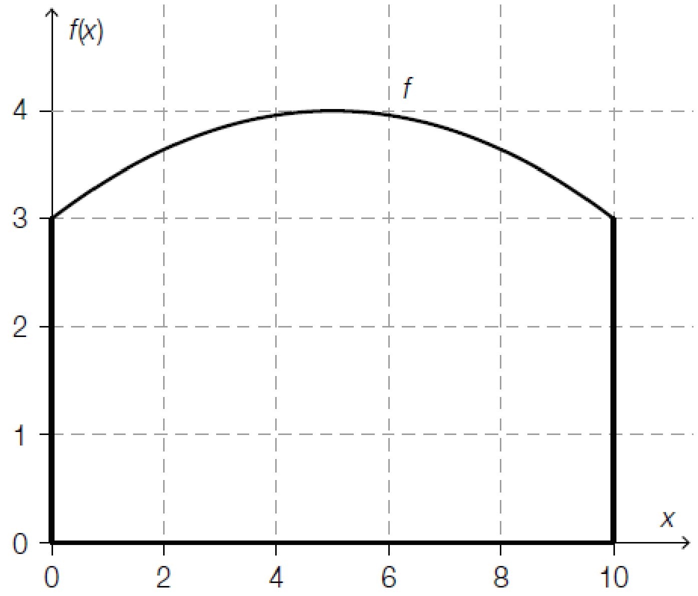
Das in der obigen Abbildung schraffierte Flächenstück soll begrünt werden.

– Vervollständigen Sie den nachstehenden Ausdruck zur Berechnung des Inhalts $A$ dieses Flächenstücks.

$$A = \boxed{\phantom{00}} \cdot \int_{\boxed{\phantom{0}}}^{\boxed{\phantom{0}}} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$$ (A)

**Aufgabe 9**

Eine Wandfläche hat drei geradlinige Berandungen, die durch die $x$-Achse, die senkrechte Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 10$ modelliert werden können. Die vierte Grenze kann durch eine Polynomfunktion $f$ zweiten Grades mit der Gleichung $f(x) = -0{,}04 \cdot x^2 + 0{,}4 \cdot x + 3$ modelliert werden. Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft den Verlauf der Grenzen dieser Wand (Maße in Metern).




Geben Sie eine Stammfunktion $F$ von $f$ an und bestimmen Sie den Inhalt der Wandfläche mithilfe dieser Stammfunktion!

Die Wandfläche soll in Teilbereichen mit unterschiedlichen Farben bemalt werden.

Variante 1:

Die Wandfläche soll durch zwei zur senkrechten Achse parallele Geraden in drei flächengleiche Teile geteilt werden.

Zeigen Sie, dass die erste Gerade die Gleichung $x = 3{,}46$ hat, und geben Sie die Gleichung der zweiten Geraden an!

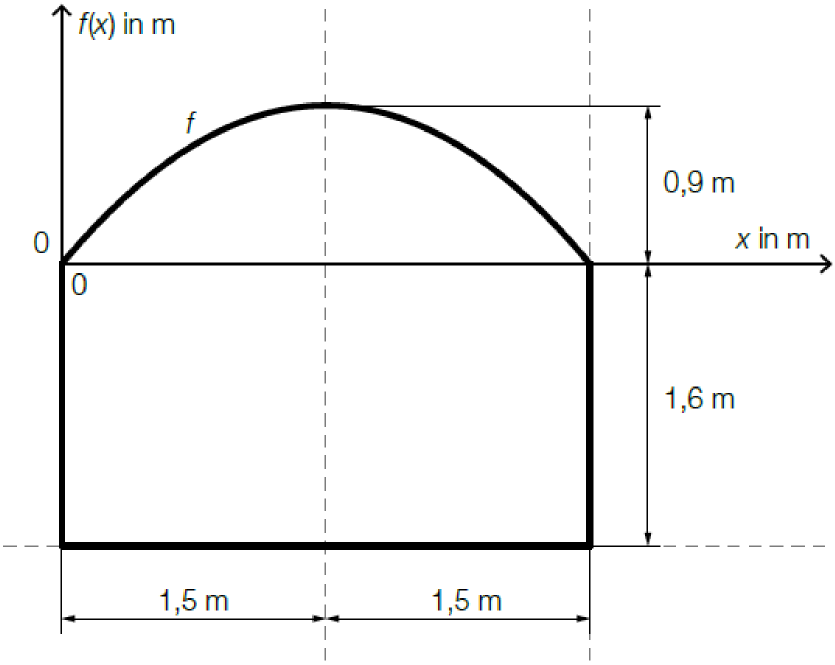
Variante 2:

Die Wandfläche soll durch eine zur $x$-Achse parallele Gerade in der Höhe $h$ in zwei flächengleiche Teile geteilt werden.

Berechnen Sie $h$!

**Aufgabe 10**

In der nachstehenden Abbildung ist die Querschnittsfläche eines 3 m breiten und 2,5 m hohen Gewächshauses dargestellt. Die Dachform des Gewächshauses kann näherungsweise durch den Graphen der quadratischen Funktion $f$ beschrieben werden.

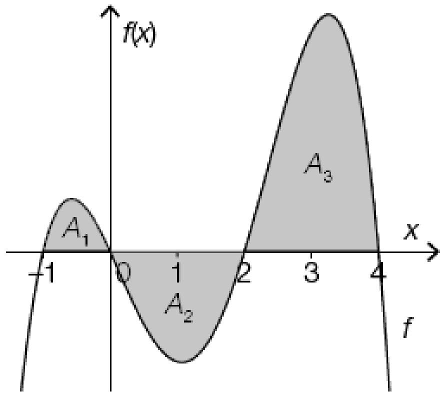



– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion $f$. (A)

– Berechnen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche des Gewächshauses. (B)

**Aufgabe 11**

Nachstehend ist der Graph einer Polynomfunktion $f$ mit den Nullstellen $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ und $x_4 = 4$ dargestellt.
Für die mit $A_1$, $A_2$ und $A_3$ gekennzeichneten Flächeninhalte gilt:
$A_1 = 0{,}4$, $A_2 = 1{,}5$ und $A_3 = 3{,}2$.




Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Gleichungen an, die wahre Aussagen sind.

| | |
|---|---|
| $\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 1{,}9$ | ☐ |
| $\int_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 1{,}7$ | ☐ |
| $\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 5{,}1$ | ☐ |
| $\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 1{,}5$ | ☐ |
| $\int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 3{,}2$ | ☐ |

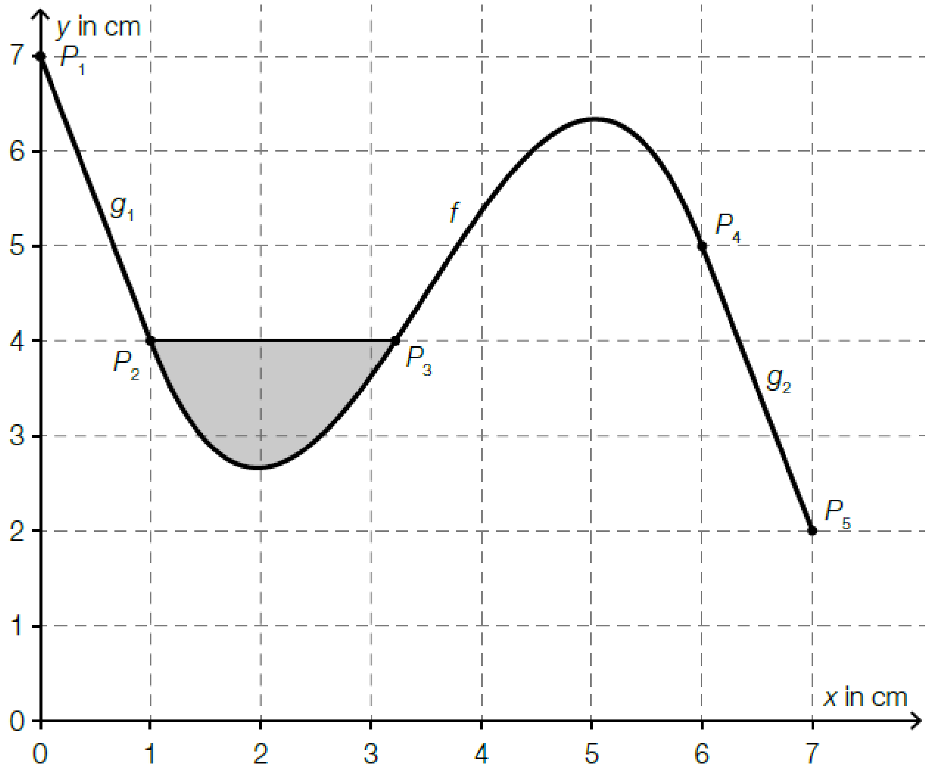
## Aufgabe 12

Die Fläche zwischen der waagrechten Strecke $P_2P_3$ und dem Graphen der Funktion $f$ soll eingefärbt werden.
Für die Funktion $f$ gilt:

$$f(x) = -\frac{32}{125} \cdot x^3 + \frac{336}{125} \cdot x^2 - \frac{951}{125} \cdot x + \frac{1\,147}{125} \quad \text{mit} \quad 1 \le x \le 6$$

$x$, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

– Berechnen Sie den Inhalt der grau markierten Fläche. (B)

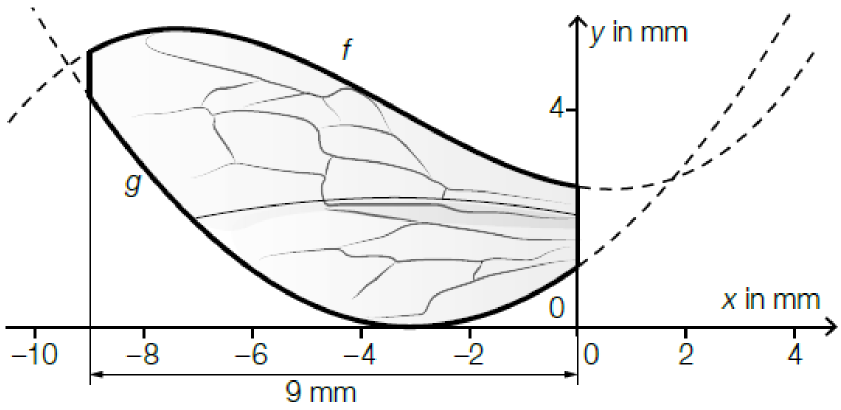


**Aufgabe 13**

Honigbienen haben 2 Vorderflügel und 2 Hinterflügel. Der linke Vorderflügel und der linke Hinterflügel bilden die linke Flügelfläche (siehe nachstehende Abbildung). Die obere Begrenzungslinie der linken Flügelfläche lässt sich näherungsweise durch den Graphen der Funktion $f$, die untere Begrenzungslinie durch den Graphen der Funktion $g$ beschreiben.

$f(x) = 0{,}012 \cdot x^3 + 0{,}12 \cdot x^2 - 0{,}16 \cdot x + 2{,}59$ mit $-9 \leq x \leq 0$
$g(x) = 0{,}12 \cdot x^2 + 0{,}73 \cdot x + 1{,}12$ mit $-9 \leq x \leq 0$

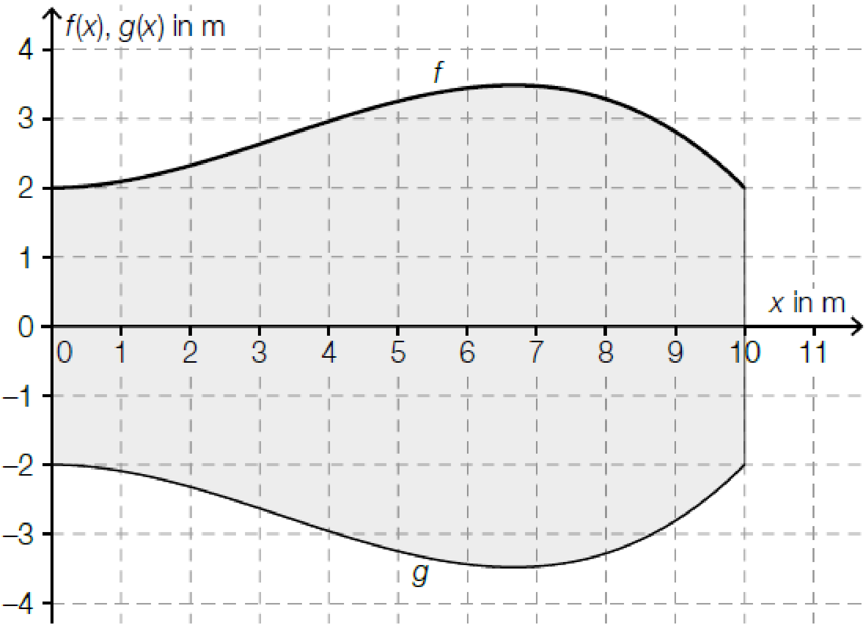
$x$, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in mm




– Berechnen Sie den Inhalt der dargestellten Flügelfläche in $cm^2$. (B)

**Aufgabe 14**

Für einen Garten wird ein Swimmingpool geplant. Die Grundfläche des Swimmingpools hat eine Symmetrieachse. Diese Fläche wurde derart in ein Koordinatensystem gezeichnet (siehe nachstehende Abbildung), dass die Symmetrieachse auf der $x$-Achse liegt.




Ein Teil der Begrenzungslinie der Fläche kann durch die Funktion $f$ beschrieben werden:

$f(x) = -0{,}01 \cdot x^3 + 0{,}1 \cdot x^2 + 2$ mit $0 \leq x \leq 10$

Die Tiefe des Beckens beträgt konstant 1,2 m.
Die zur vollständigen Befüllung des Swimmingpools benötigte Wassermenge ergibt sich aus dem Inhalt der in der obigen Abbildung dargestellten Grundfläche multipliziert mit der Tiefe des Swimmingpools.

– Ermitteln Sie die benötigte Wassermenge zur vollständigen Befüllung des Swimmingpools in Litern. (B)

Die dargestellte Grundfläche des Swimmingpools soll durch eine zur senkrechten Achse parallele Gerade bei $x_1$ in 2 Teilflächen gleichen Flächeninhalts unterteilt werden.

– Vervollständigen Sie die nachstehende Gleichung zur Berechnung von $x_1$:

$$\int_0^{\boxed{\phantom{xx}}} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{\boxed{\phantom{xx}}} f(x)\,dx$$ (A)

**Aufgabe 15**

Betrachtet wird eine lineare (nicht konstante) Funktion $f$, für die $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ gilt.

– Geben Sie die Nullstelle von $f$ an und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Betrachtet wird eine quadratische Funktion $g$ mit $g(x) = a \cdot x^2 + b$ $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$, für die $\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ gilt.

– Begründen Sie anhand des Verlaufs des Graphen von $g$, warum $a$ und $b$ verschiedene Vorzeichen haben müssen.

– Geben Sie den Zusammenhang zwischen $a$ und $b$ mithilfe einer Gleichung an.