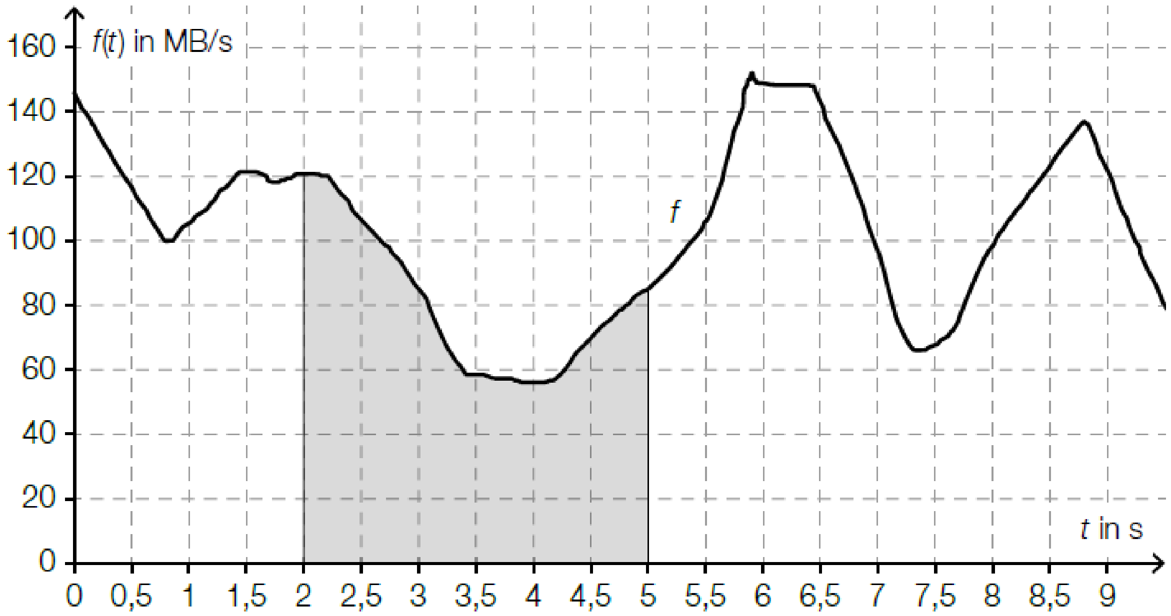
MATHAGO

Hausübung

Differentialrechnung

Aufgabe 1

Jasmin löscht Dateien von der Festplatte ihres Laptops. Die Funktion f beschreibt die Geschwindigkeit in Megabyte pro Sekunde (MB/s), mit der diese Daten gelöscht werden:



Im gesamten nachstehenden Zeitintervall soll gelten: $f'(t) > 0$

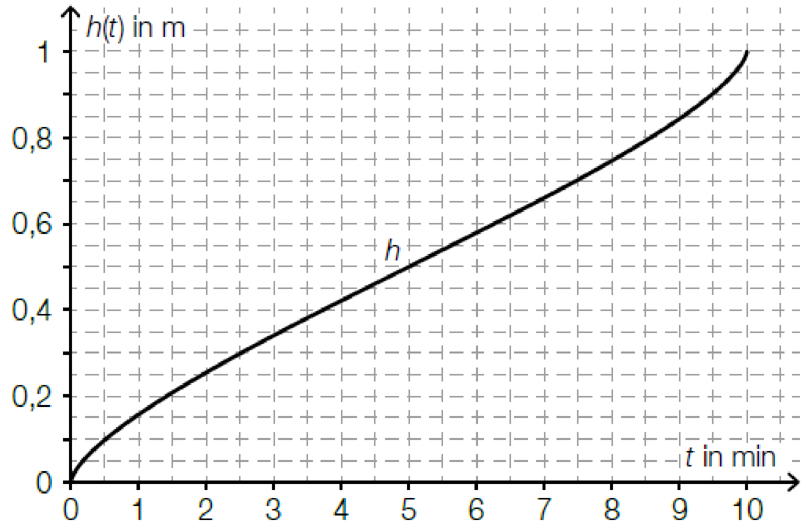
– Geben Sie die größtmögliche obere Grenze dieses Zeitintervalls an.

$[7{,}4;\ \boxed{}\ ]$

Aufgabe 2

Ein leerer Öltank wird mit Heizöl befüllt. Die nachstehende Abbildung zeigt den zeitlichen Verlauf der Füllhöhe während der Befüllung.

t ... Zeit in min
$h(t)$ ... Füllhöhe zur Zeit t in m



– Begründen Sie mithilfe des oben abgebildeten Graphen der Funktion h, warum im Zeitintervall $]0; 10[$ gilt: $h'(t) > 0$ (R)

Aufgabe 3

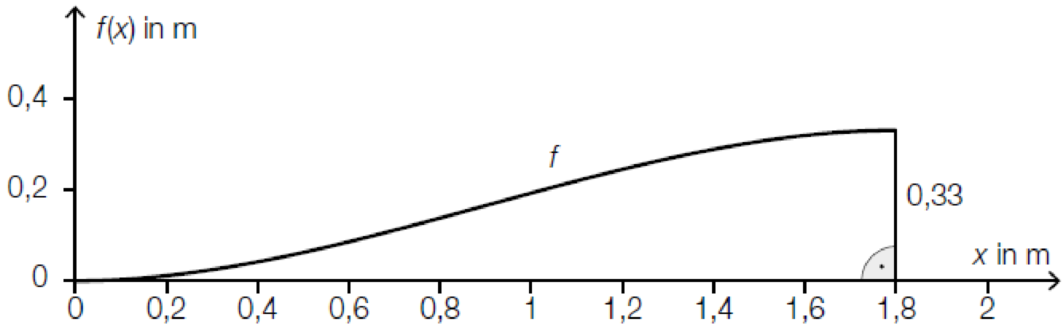
Für die Funktion g gilt:

$$g(x) = \frac{1}{9} \cdot x^3 - \frac{11}{9} \cdot x^2 + \frac{32}{9} \cdot x - \frac{28}{9}$$

– Ermitteln Sie die Koordinaten des Tiefpunkts von g.

Aufgabe 4

Die nachstehende Abbildung zeigt das Modell für eine andere Rampe in der Ansicht von der Seite.



$f(x) = -\frac{55}{486} \cdot x^3 + \frac{11}{36} \cdot x^2$ mit $0 \leq x \leq 1{,}8$

Der Bauherr gibt für die Rampe eine maximale Steigung von 25 % vor.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob die Vorgabe hinsichtlich der maximalen Steigung erfüllt ist.

Aufgabe 5

Das Höhenprofil zwischen den Punkten C und D kann näherungsweise durch die Funktion g beschrieben werden.

$$g(x) = \frac{1}{7\,500\,000} \cdot x^3 - \frac{131}{90\,000} \cdot x^2 + \frac{319}{60} \cdot x - 4\,700$$

x ... horizontale Entfernung vom Ausgangspunkt in m
g ... Seehöhe bei der horizontalen Entfernung x in m

– Berechnen Sie diejenige Stelle zwischen den Punkten C und D, an der die Steigung am kleinsten ist. (B)

Aufgabe 6

In einem Lehrvideo wird die Flugbahn eines Golfballs in einem horizontalen Gelände näherungsweise durch die Funktion h beschrieben:

$h(x) = -0{,}00006 \cdot x^3 - 0{,}0003 \cdot x^2 + 0{,}2 \cdot x$ mit $0 \leq x \leq 55{,}28$

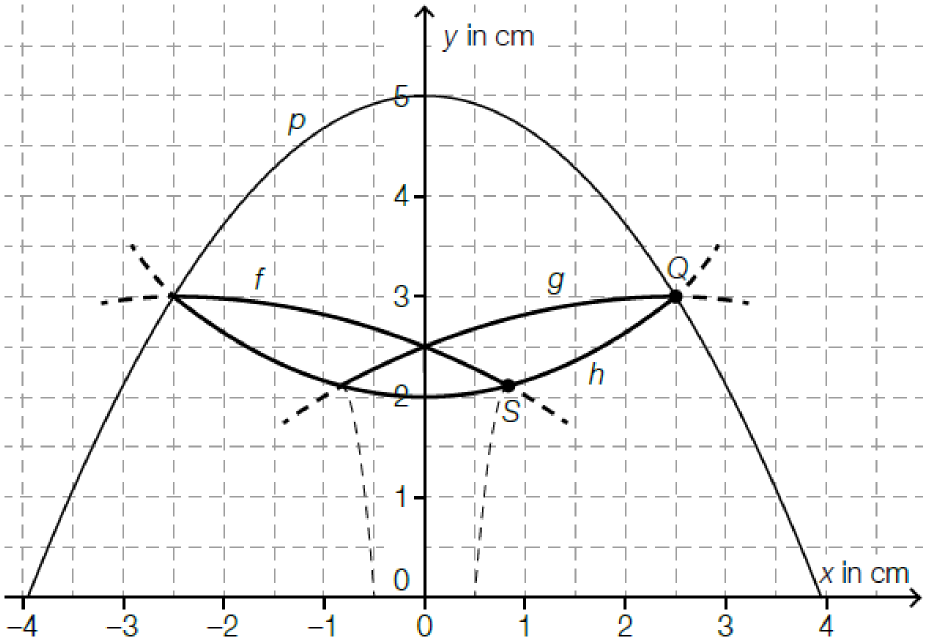
x ... waagrechter Abstand vom Abschlagpunkt in m
$h(x)$ ... Höhe des Golfballs beim Abstand x in m

- Stellen Sie mithilfe von h eine Gleichung auf, mit der man berechnen kann, in welcher Entfernung vom Abschlagpunkt der Golfball eine Höhe von 80 cm hat. (A)
- Berechnen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn im Abschlagpunkt. (B)
- Kreuzen Sie die richtige Aussage an. *[1 aus 5]* (B)

Die Funktion h' ist überall positiv.	☐
Die Funktion h'' ist eine lineare Funktion.	☐
Die Funktion h'' ist überall positiv.	☐
Die Funktion h'' ist monoton steigend.	☐
Die Funktion h' ist positiv gekrümmt.	☐

Aufgabe 7

In der nachstehenden Abbildung ist das Logo eines Vereins in einem Koordinatensystem dargestellt.



– Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Winkel α mit $\alpha = \arctan(h'(2{,}5))$ ein.

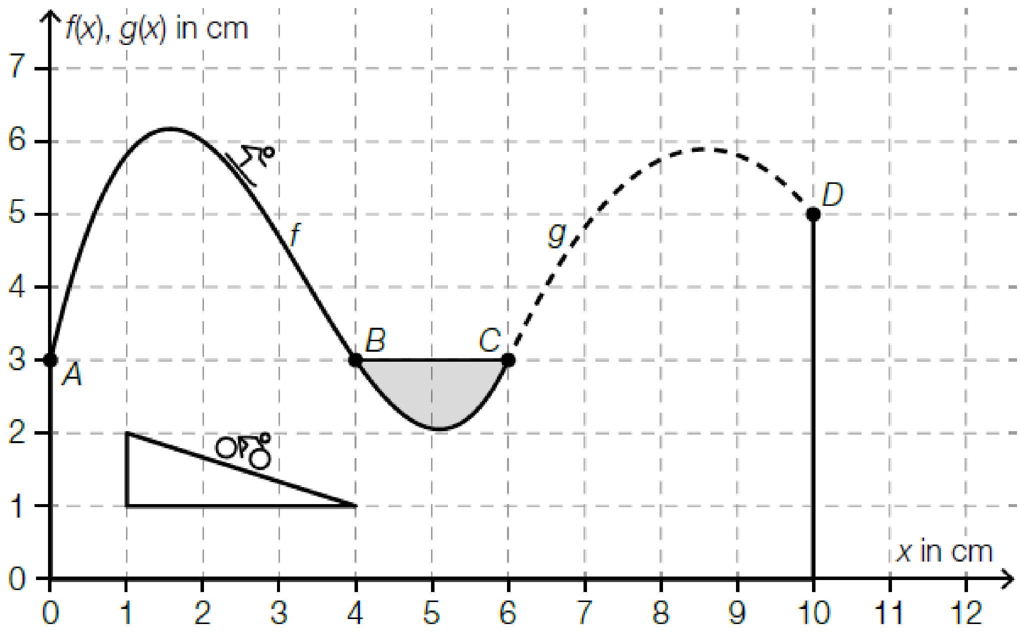
Aufgabe 8

Die Funktion p ist von der Form $p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$.
Der Graph von p schneidet die x-Achse im Koordinatenursprung und an der Stelle $x = 2$.
Er verläuft durch den Punkt $(1\,|\,0{,}5)$ und ändert an der Stelle $x = \frac{7}{3}$ sein Krümmungsverhalten.

– Erstellen Sie mithilfe dieser Informationen ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von p. (A)

Aufgabe 9

Das Logo einer Ferienregion ist modellhaft in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Für die Funktionen f und g gilt:

$f(x) = \frac{3}{16} \cdot x^3 - \frac{15}{8} \cdot x^2 + \frac{9}{2} \cdot x + 3$ mit $0 \leq x \leq 6$

$g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $6 \leq x \leq 10$

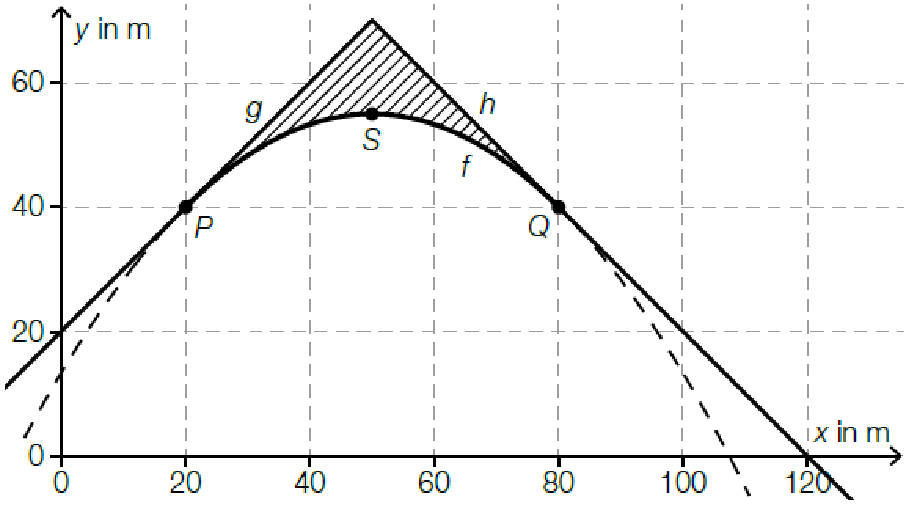
x, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in cm

Der Graph der Funktion f geht im Punkt C knickfrei in den Graphen der quadratischen Funktion g über. „Knickfrei" bedeutet, dass die Funktionen an derjenigen Stelle, an der sie zusammenstoßen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben. Der Graph der Funktion g endet im Punkt D.

– Erstellen Sie aus diesen Informationen ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion g.

Aufgabe 10

Die nachstehende Abbildung zeigt eine durch die beiden linearen Funktionen g und h modellierte Straßenkreuzung. Der Verlauf der geplanten Umfahrungsstraße wird durch den Graphen der quadratischen Funktion f mit dem Scheitelpunkt S modelliert.



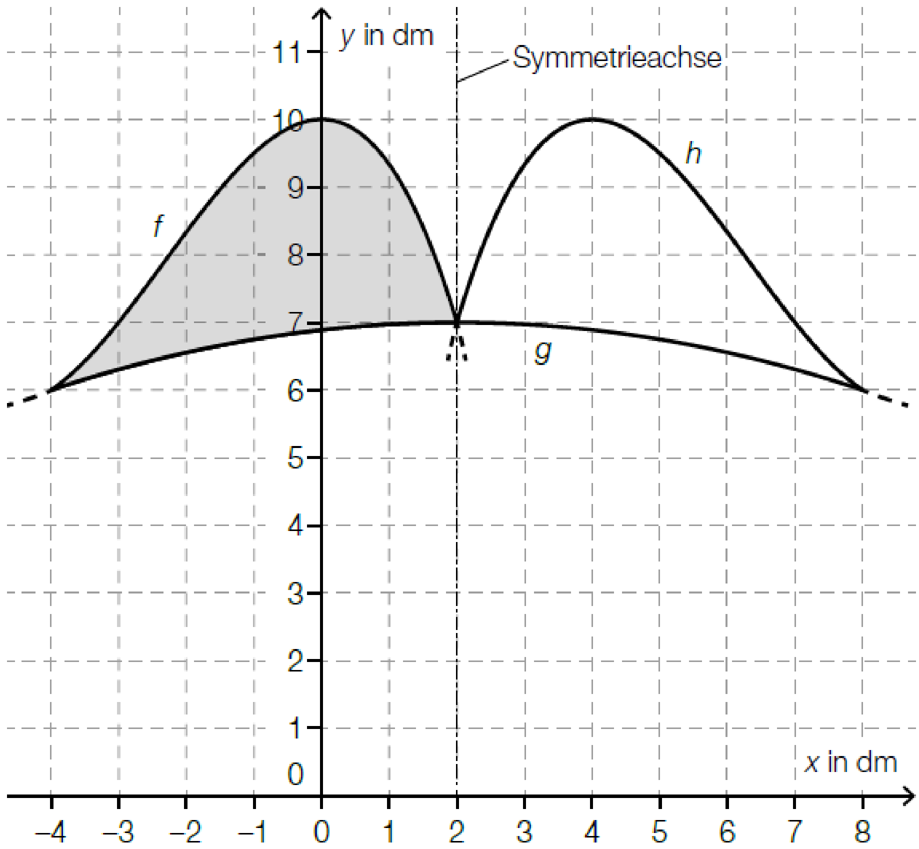
x, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ … Koordinaten in m

Die Übergänge zwischen den Graphen der Funktionen f und g im Punkt P und den Graphen der Funktionen f und h im Punkt Q erfolgen „knickfrei" (das bedeutet, dass die Funktionen an den Stellen, an denen sie zusammenstoßen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben).

– Erstellen Sie mithilfe der Punkte P und Q sowie der Steigung der Geraden g ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der quadratischen Funktion f. (A)

Aufgabe 11

In der nachstehenden Abbildung wurden die beiden zueinander symmetrischen „Flügel" der Skulptur mithilfe der Funktionen f, g und h modelliert.



– Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung den Winkel α, für den gilt:
$\alpha = 2 \cdot (90° - \arctan(h'(2)))$

Aufgabe 12

Die zweite Ableitung einer Funktion f ist durch $f''(x) = 9 \cdot x - 1$ gegeben.

– Geben Sie die Wendestelle von f an und erläutern Sie mithilfe von f'' das Krümmungsverhalten des Graphen von f.

Für die Funktion f gilt:

- f hat an der Stelle $x = 1$ eine Nullstelle.
- $f(-1) = 2$

– Geben Sie eine Gleichung der Funktion f an.

Aufgabe 13

Die zweite Ableitung f'' einer Polynomfunktion f ist $f''(x) = 3 \cdot x - 6$.

Dabei ist t_W mit $t_W(x) = k \cdot x + 2$ und $k \in \mathbb{R}$ die Tangente an den Graphen von f im Wendepunkt $W = (x_W | -6)$.

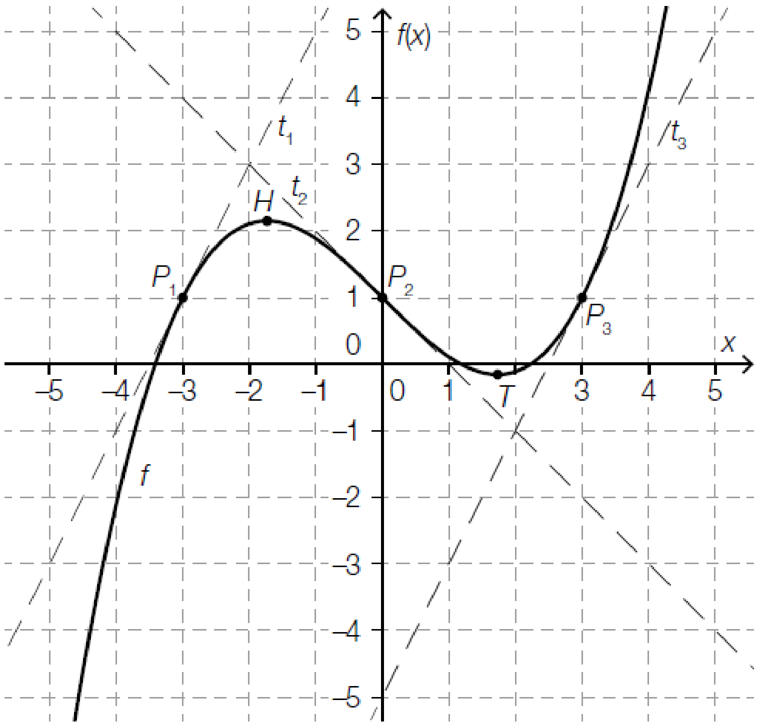
– Berechnen Sie k.

– Geben Sie eine Gleichung von f an und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

Aufgabe 14

Die unten stehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f vom Grad 3 mit dem Hochpunkt H und dem Tiefpunkt T.
Die Geraden t_1, t_2 und t_3 sind Tangenten an den Graphen von f in den Punkten P_1, P_2 und P_3.

Die Koordinaten der Punkte P_1, P_2 und P_3 sowie der Anstieg der jeweils zugehörigen Tangente sind ganzzahlig.



– Erläutern Sie, welche Informationen die abgebildeten Tangenten in P_1, P_2 und P_3 sowie die Punkte H und T für den Graphen von f' liefern.

– Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen von f' ein.

Aufgabe 15

Gegeben ist die Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^3 + c \cdot x$ mit den Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

– Geben Sie an, wie viele Extremstellen und wie viele Wendestellen die Funktion f maximal haben kann, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

– Bestimmen Sie die Wendestellen in Abhängigkeit von den Parametern.

– Argumentieren Sie, warum es für $b \neq 0$ auf jeden Fall mindestens eine Wendestelle gibt, und geben Sie an, in welchem Fall es mehr als eine Wendestelle gibt.