MATHAGO

Hausübung

Bewegungsaufgaben

Aufgabe 1

Ein Wanderer geht über die Brücke. Vom höchsten Punkt des Brückengeländers aus möchte er die ungefähre Höhe der Brücke ermitteln, indem er einen Stein senkrecht nach unten fallen lässt. Bis zum Auftreffen des Steins auf die Wasseroberfläche vergehen 1,9 s. Näherungsweise gilt folgende Formel:

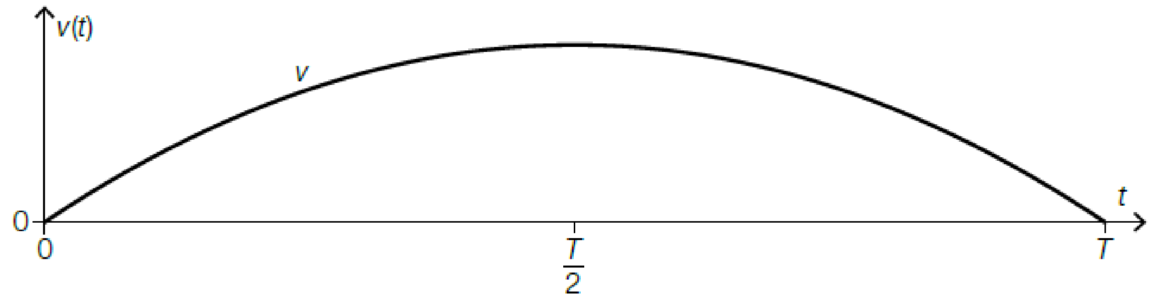
$v(t) = 10 \cdot t$

t ... Zeit nach dem Loslassen des Steins in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit des Steins zur Zeit t in m/s

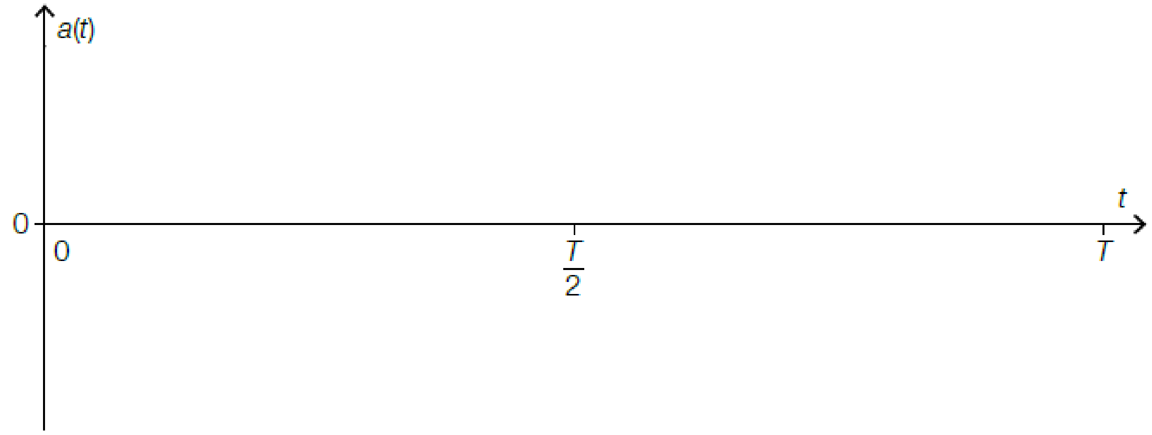
– Bestimmen Sie mithilfe der obigen Formel näherungsweise die Höhe der Brücke. (B)

Aufgabe 2

Durch Minimundus fährt ein kleiner Zug. Der Graph der quadratischen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v dieses kleinen Zuges ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Skizzieren Sie den Graphen der zugehörigen Beschleunigung-Zeit-Funktion a im nachstehenden Koordinatensystem. (A)



Aufgabe 3

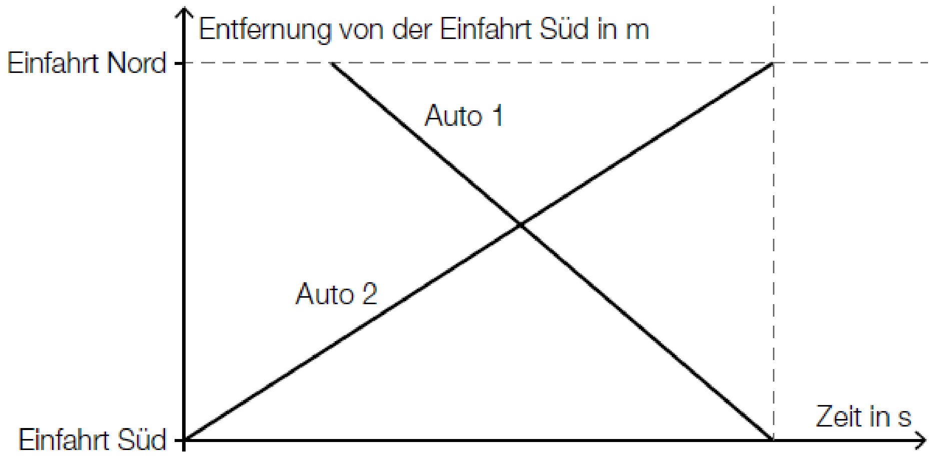
Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der die mittlere Geschwindigkeit des Rennautos in den ersten 10 Sekunden der Fahrt zutreffend beschreibt. *[1 aus 5]*

t ... Zeit in s
$a(t)$ ... Beschleunigung zur Zeit t in m/s^2
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

$\frac{v(10) - v(0)}{10}$	☐
$\frac{a(10) - a(0)}{10}$	☐
$\frac{v'(10) - v'(0)}{10}$	☐
$\frac{s'(10) - s'(0)}{10}$	☐
$\frac{s(10) - s(0)}{10}$	☐

Aufgabe 4

Zwei Autos durchfahren den gleichen Tunnel in verschiedene Richtungen. Die Graphen der beiden Funktionen geben jeweils die Entfernung von der Einfahrt Süd an (siehe nachstehende Abbildung).



– Beschreiben Sie die Tunneldurchfahrt der beiden Autos bezüglich ihrer Geschwindigkeiten und der Zeitpunkte ihrer Ein- und Ausfahrten. (R)

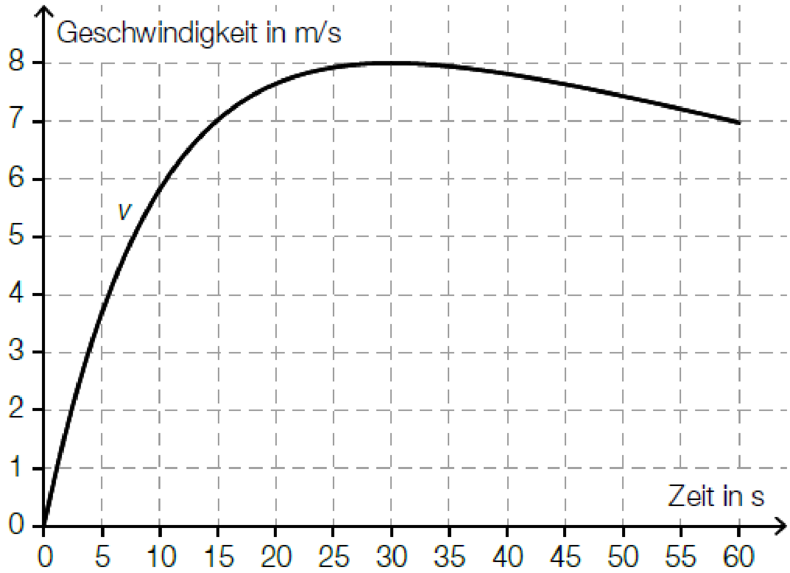
Aufgabe 5

Die Weltrekordzeit von Usain Bolt im 100-m-Sprint der Männer aus dem Jahr 2009 beträgt 9,58 s. Die dabei erzielte Maximalgeschwindigkeit betrug 44,72 km/h.

– Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Maximalgeschwindigkeit von Bolt über der Durchschnittsgeschwindigkeit seines Laufes liegt. (B)

Aufgabe 6

Philipp nimmt an einem Wettbewerb des Wiener Ruderclubs teil.
In der nachstehenden Abbildung ist seine Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit für diesen Bewerb modellhaft durch den Graphen der Funktion v dargestellt.



– Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung Philipps maximale Geschwindigkeit. Geben Sie das Ergebnis in der Einheit km/h an. (R)

– Beschreiben Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet werden kann.

$$\frac{v(10) - v(5)}{v(5)}$$ (R)

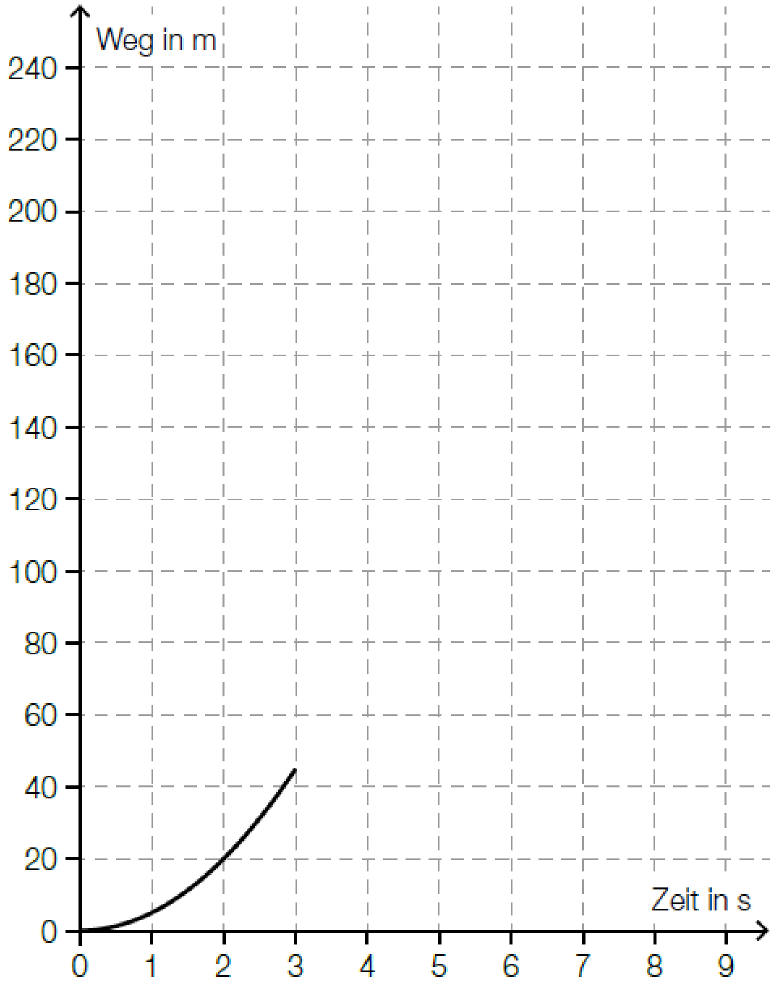
– Erstellen Sie mithilfe der Funktion v eine Formel zur Berechnung des zurückgelegten Weges s im Zeitintervall [0; 60].

$s =$ ______________________________ (A)

Aufgabe 7

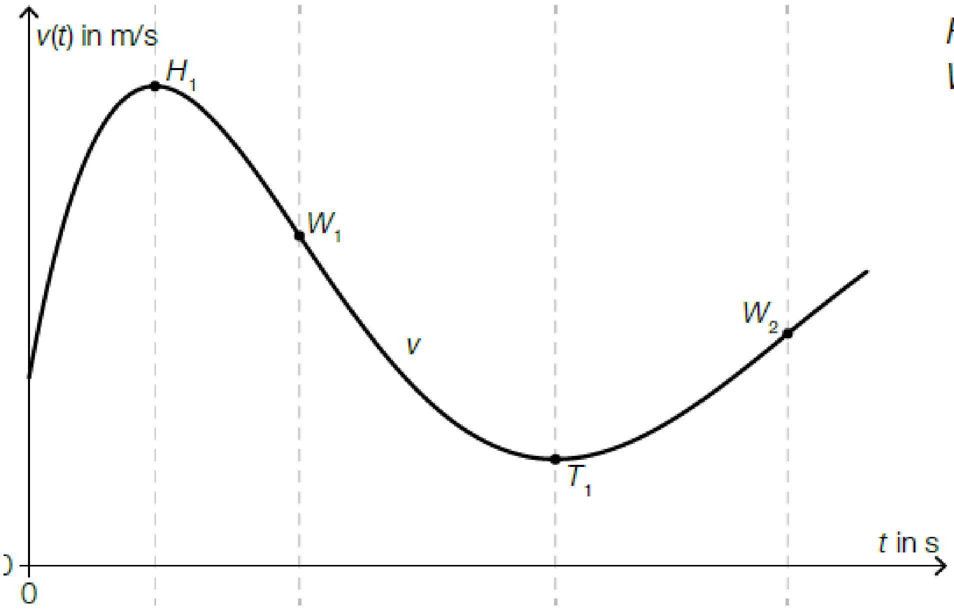
Ein Gepard benötigt eine Zeit von 3 s, um seine Geschwindigkeit von 0 m/s auf 30 m/s zu erhöhen. Die Geschwindigkeit von 30 m/s kann er dann für weitere 6 s konstant halten.

Im nachstehenden Diagramm ist der Graph der zugehörigen Weg-Zeit-Funktion im Intervall [0; 3] dargestellt.



– Zeichnen Sie im obigen Diagramm den Graphen der Weg-Zeit-Funktion im Intervall [3; 9] ein.

Aufgabe 8



H_1, T_1 ... Extrempunkte
W_1, W_2 ... Wendepunkte

- Begründen Sie anhand der obigen Abbildung, warum die Funktion v keine Polynomfunktion 3. Grades sein kann. (R)
- Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem das zugehörige Beschleunigung-Zeit-Diagramm für diesen Teil der Fahrt unter Berücksichtigung der Punkte H_1, T_1, W_1 und W_2. (A)

Aufgabe 9

Ein Auto durchfährt einen bestimmten Tunnel in der Schweiz in 60 s.

Für die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v des Autos während der Tunneldurchfahrt gilt:

$$v(t) = \frac{1}{8000} \cdot t^3 - \frac{1}{80} \cdot t^2 + \frac{3}{10} \cdot t + 20 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 60$$

t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

Zum Zeitpunkt t_1 gilt:
$v'(t_1) = 0$
$v''(t_1) > 0$

– Interpretieren Sie die Bedeutung von t_1 bezogen auf den Verlauf des Graphen von v. (R)

– Berechnen Sie die Länge des Tunnels. (B)

Ein anderes Auto hat bei der Tunneleinfahrt eine Geschwindigkeit von 18 m/s. Dieses Auto hat eine konstante Beschleunigung von 0,2 m/s².

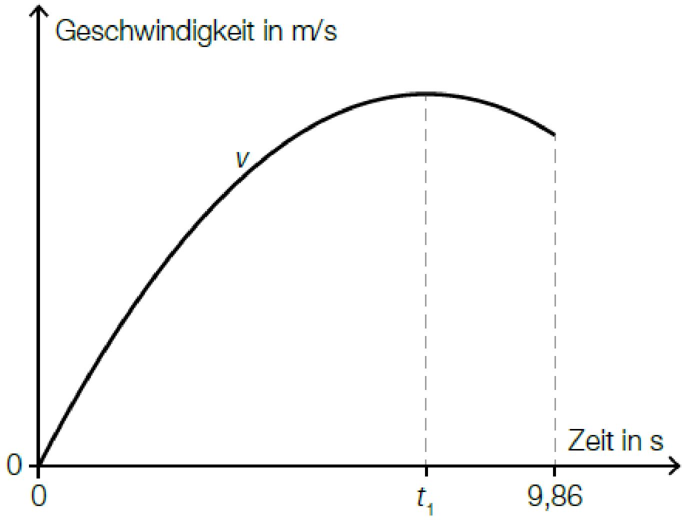
– Erstellen Sie eine Gleichung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion für dieses Auto.
Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt des Einfahrens in den Tunnel. (A)

Aufgabe 10

Carl Lewis lief im Jahr 1991 die 100 m in einer Zeit von 9,86 s. In der nachstehenden Abbildung ist modellhaft der Graph der zugehörigen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v dargestellt.

$v(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t$

t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s



– Erstellen Sie mithilfe von a und b eine Formel zur Berechnung des Zeitpunkts t_1 seiner Maximalgeschwindigkeit.

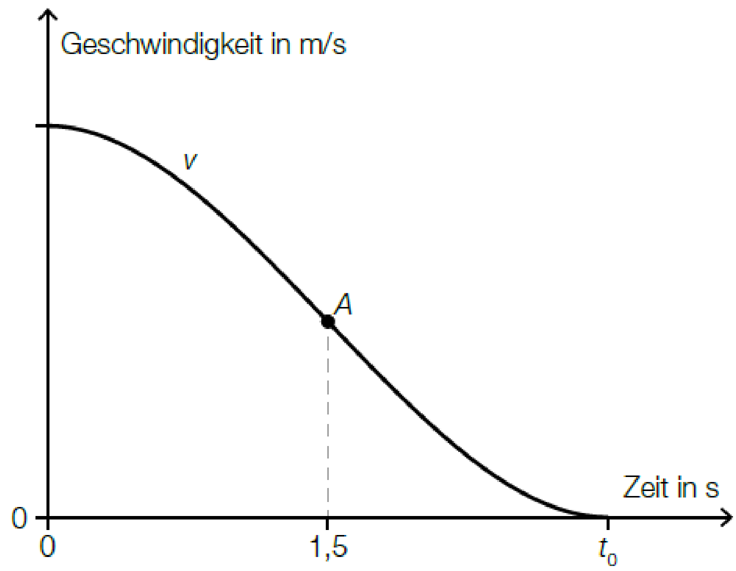
t_1 = ____ (A)

– Interpretieren Sie die Bedeutung des nachstehenden Ausdrucks im gegebenen Sachzusammenhang.

$|v(9{,}86) - v(t_1)|$ (R)

Aufgabe 11

Der Verlauf der Geschwindigkeit eines Fahrzeugs während eines Bremsvorgangs kann näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden.



$v(t) = a \cdot t^3 - 5 \cdot t^2 + 15$ mit $0 \leq t \leq t_0$

t ... Zeit ab Beginn des Bremsvorgangs in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s
a ... Parameter

– Berechnen Sie die Geschwindigkeit zu Beginn des Bremsvorgangs. Geben Sie das Ergebnis in der Einheit km/h an. (B)

Der Punkt A ist der Wendepunkt der Funktion v.

– Ermitteln Sie den Parameter a. (A)

Aufgabe 12

Ein Schüler fährt mit dem Motorrad zur Schule. Er fährt mit einer als konstant angenommenen Geschwindigkeit von 72 km/h (= 20 m/s) und startet zum Zeitpunkt $t = 0$.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Schüler 18 km von der Schule entfernt und hat bis zum Unterrichtsbeginn 15 Minuten Zeit.

Aufgrund einer Verkehrsbehinderung muss der Schüler seine Geschwindigkeit auf den letzten 6 km reduzieren. Er fährt auf den letzten 6 km mit einer als konstant angenommenen Geschwindigkeit von 50 km/h.

– Geben Sie an, um wie viele Minuten der Schüler zu spät bei der Schule ankommt, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

Aufgabe 13

Die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs zwischen zwei Ampeln im Zeitintervall $[0; t_1]$ wird modellhaft durch die Funktion v mit $v(t) = -\frac{4}{15} \cdot t^2 + 4 \cdot t$ beschrieben, wobei t in s und $v(t)$ in m/s gemessen wird.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Fahrzeug bei der ersten Ampel.

Zum Zeitpunkt t_1 kommt das Fahrzeug bei der zweiten Ampel zum Stillstand.

– Geben Sie diesen Zeitpunkt t_1 an und berechnen Sie den im betrachteten Zeitintervall zurückgelegten Weg.

– Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt $t_0 \in [0; t_1]$, zu dem das Fahrzeug seine größte Geschwindigkeit erreicht, und geben Sie diese maximale Geschwindigkeit an.

– Geben Sie unter Verwendung von v eine Gleichung an, mit deren Hilfe derjenige Zeitpunkt t_2 berechnet werden kann, zu dem das Fahrzeug 80 % des Weges zwischen den beiden Ampeln zurückgelegt hat, und berechnen Sie diesen Zeitpunkt.

Aufgabe 14

Ein Autofahrer fährt mit einer Geschwindigkeit von 35 m/s, bevor er zu bremsen beginnt. Zwei Sekunden nach Einsetzen der Bremswirkung beträgt die Geschwindigkeit des Fahrzeugs nur noch 21 m/s.

Die Funktion v mit $v(t) = k \cdot t + d$ modelliert die Geschwindigkeit des Fahrzeugs t Sekunden nach Einsetzen der Bremswirkung ($v(t)$ in m/s).

– Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung von v und interpretieren Sie den Wert von k im gegebenen Kontext.

Der Autofahrer ist mit einer Geschwindigkeit von 35 m/s unterwegs und sieht in 130 m Entfernung ein Hindernis. Erst nach einer Reaktionszeit von einer Sekunde kann er den oben beschriebenen Bremsvorgang einleiten.

– Geben Sie an, ob das Fahrzeug rechtzeitig anhält, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

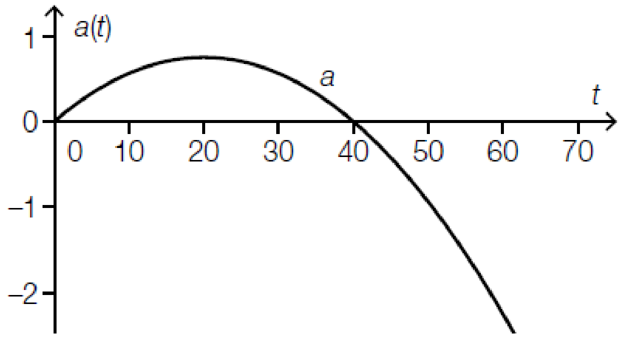
Aufgabe 15

Ein Zug einer städtischen U-Bahn fährt zum Zeitpunkt $t = 0$ von der Station A ab und hält erst wieder in der Station B.

Die Funktion $a: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0,\ t \mapsto a(t)$ modelliert in Abhängigkeit von der Zeit t die Beschleunigung des Zuges (t in s, $a(t)$ in m/s²).

Dabei gilt: $a(t) = -\frac{3}{1600} \cdot t^2 + \frac{3}{40} \cdot t$

Der Graph von a ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Interpretieren Sie $\int_0^{40} a(t)\,dt$ im gegebenen Kontext.

Es gilt die Beziehung $\int_0^{t_1} a(t)\,dt = 0$ mit $t_1 \neq 0$.

– Interpretieren Sie t_1 im gegebenen Kontext.

– Geben Sie die Entfernung zwischen den Stationen A und B an.