Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2020

Mathematik

Kompensationsprüfung 6
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Hangneigung

Um die Lawinengefahr einschätzen zu können, ist es wichtig, die Hangneigung zu kennen.

Aufgabenstellung:

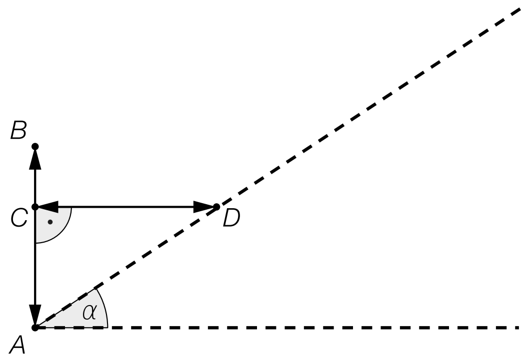
Ein bestimmter Hang weist eine Neigung von 30° auf.

– Ermitteln Sie sein Gefälle in Prozent.

Leitfrage:

In der unten stehenden Abbildung ist eine Methode zur Einschätzung der Hangneigung mittels Skistöcken dargestellt. Dabei wird die Hangneigung α mithilfe zweier (gleich langer) Skistöcke *AB* und *CD* ermittelt.

Den Skistock *CD* hält man waagrecht vom Hang weg, den Skistock *AB* bringt man senkrecht zum Skistock *CD* in Position (siehe Abbildung).



– Geben Sie die Hangneigung an, wenn bei der angegebenen Vorgehensweise die Punkte *B* und *C* zusammenfallen.
– Berechnen Sie die Hangneigung α, wenn die Streckenlänge $\overline{BC}$ ein Drittel der Skistocklänge $\overline{AB}$ ausmacht.

Lösung zur Aufgabe 1

Hangneigung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\tan(30°) = 0{,}57735... \approx 57{,}74\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn das richtige Gefälle des Hanges in Prozent angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Wenn $B = C$ gilt, beträgt die Hangneigung 45°.

$\tan(\alpha) = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 33{,}7°$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Hangneigung in beiden Fällen angegeben wird.

Aufgabe 2

Allgemeine Gasgleichung

Die Gleichung $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ beschreibt modellhaft den Zusammenhang zwischen dem Druck p, dem Volumen V, der Stoffmenge n und der absoluten Temperatur T eines idealen Gases. Darin ist R eine Konstante.

Aufgabenstellung:

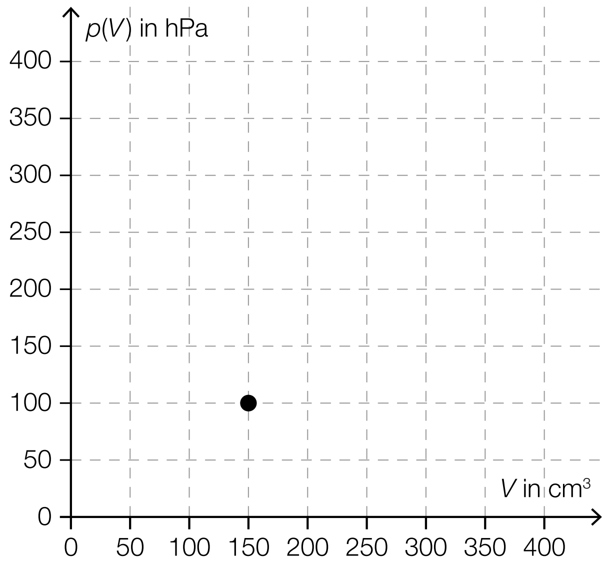
– Begründen Sie, warum die Abhängigkeit des Drucks p von der Temperatur T durch eine lineare Funktion der Form $p(T) = k \cdot T + d$ (mit $k, d \in \mathbb{R}$) modelliert werden kann, wenn die anderen Größen konstant sind.
– Geben Sie die Parameter k und d dieser linearen Funktion an.

Leitfrage:

Der Druck p eines idealen Gases kann als Funktion des Volumens V betrachtet werden, wenn die Größen n, R und T konstant sind.

– Ergänzen Sie die nachstehende Wertetabelle, stellen Sie den Graphen der Funktion p im unten stehenden Koordinatensystem dar und geben Sie den Funktionstyp von p an.

V in cm³	50	100	150	200	300
$p(V)$ in hPa			100		



Lösung zur Aufgabe 2

Allgemeine Gasgleichung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Wenn n, R und V konstant sind, gilt $p(T) = \frac{n \cdot R}{V} \cdot T$. Diese Gleichung entspricht der Funktionsgleichung einer linearen Funktion mit den Parametern $k = \frac{n \cdot R}{V}$ und $d = 0$.

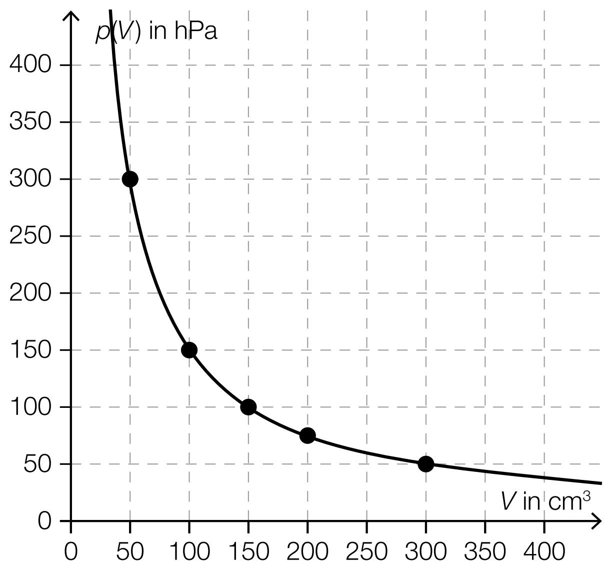
Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine (sinngemäß) korrekte Begründung erfolgt und die richtigen Parameter k und d der zugehörigen linearen Funktion angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$p(V) = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} \quad \Rightarrow \quad p(V) \cdot V = \text{konstant} \quad \Rightarrow \quad p(V) \cdot V = 15\,000$

V in cm^3	50	100	150	200	300
$p(V)$ in hPa	300	150	100	75	50



Bei dieser Funktion p handelt es sich um eine Potenzfunktion.

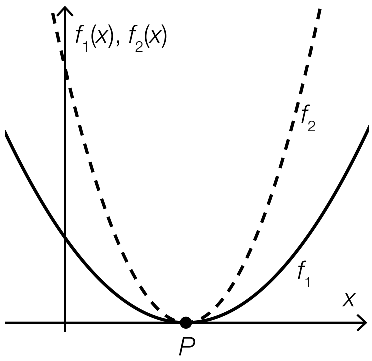
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wertetabelle richtig ergänzt, ein richtiger Graph dargestellt und ein richtiger Funktionstyp angegeben wird.

Aufgabe 3

Zwei Parabeln

Gegeben sind die Graphen zweier Funktionen f_1 und f_2 mit $f_1(x) = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1$ und $f_2(x) = a_2 \cdot x^2 + b_2 \cdot x + c_2$.
Die Graphen der beiden Funktionen haben nur den Punkt P auf der positiven x-Achse gemeinsam und sind in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Aufgabenstellung:

– Setzen Sie jeweils das passende Zeichen „<“, „>“ oder „=“ so, dass eine wahre Aussage entsteht, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

a_1 ______ a_2

c_1 ______ c_2

Leitfrage:

Im Folgenden gilt: $a_1 = 0{,}25$ und $P = (2|0)$.

– Geben Sie die Werte der Parameter b_1 und c_1 an und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

Lösung zur Aufgabe 3

Zwei Parabeln

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$a_1 < a_2$, weil der zur Funktion f_1 gehörende Graph „flacher“ verläuft als der zu f_2 gehörende Graph.
$c_1 < c_2$, weil $f_1(0) < f_2(0)$ ist.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Zeichen richtig eingesetzt und (sinngemäß) korrekte Begründungen angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$b_1 = -1, \ c_1 = 1$

mögliche Vorgehensweise:

$f_1(x) = 0{,}25 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1$

$f_1'(x) = 0{,}5 \cdot x + b_1$

$f_1'(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + b_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = -1$

$f_1(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 2 + c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden richtigen Parameterwerte und eine korrekte Vorgehensweise angegeben werden.

Aufgabe 4

Geschwindigkeit eines Fahrzeugs

Die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs zwischen zwei Ampeln im Zeitintervall $[0; t_1]$ wird modellhaft durch die Funktion v mit $v(t) = -\frac{4}{15} \cdot t^2 + 4 \cdot t$ beschrieben, wobei t in s und $v(t)$ in m/s gemessen wird.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Fahrzeug bei der ersten Ampel.

Aufgabenstellung:

Zum Zeitpunkt t_1 kommt das Fahrzeug bei der zweiten Ampel zum Stillstand.

– Geben Sie diesen Zeitpunkt t_1 an und berechnen Sie den im betrachteten Zeitintervall zurückgelegten Weg.

Leitfrage:

– Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt $t_0 \in [0; t_1]$, zu dem das Fahrzeug seine größte Geschwindigkeit erreicht, und geben Sie diese maximale Geschwindigkeit an.

– Geben Sie unter Verwendung von v eine Gleichung an, mit deren Hilfe derjenige Zeitpunkt t_2 berechnet werden kann, zu dem das Fahrzeug 80 % des Weges zwischen den beiden Ampeln zurückgelegt hat, und berechnen Sie diesen Zeitpunkt.

Lösung zur Aufgabe 4

Geschwindigkeit eines Fahrzeugs

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$v(t) = -\frac{4}{15} \cdot t^2 + 4 \cdot t = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 15\text{ s}$

$s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{4}{45} \cdot t^3 + 2 \cdot t^2 + c$

$s(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$

$s(15) = 150\text{ m}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl der richtige Zeitpunkt als auch die richtige zurückgelegte Wegstrecke angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$v'(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{8}{15} \cdot t_0 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 7{,}5\text{ s}$

$v(7{,}5) = 15\text{ m/s}$

mögliche Gleichung:

$\int_0^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t = 0{,}8 \cdot 150 \quad \Rightarrow \quad t_2 \approx 10{,}7\text{ s}$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl der richtige Zeitpunkt t_0 und die richtige Geschwindigkeit $v(t_0)$ als auch eine richtige Gleichung und der richtige Zeitpunkt t_2 angegeben werden.

Aufgabe 5

Erweiterte Datenliste

Gegeben ist eine aus sechs Zahlen bestehende Datenliste:

$x_1 = 4,\ x_2 = 8,\ x_3 = 2,\ x_4 = 7,\ x_5 = 4,\ x_6$

Das arithmetische Mittel der Datenliste beträgt $\bar{x} = 5$.

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie den Wert x_6 sowie den Median der Datenliste.

Leitfrage:

– Ergänzen Sie die Datenliste um zwei ganze Zahlen so, dass die beiden nachstehenden Bedingungen erfüllt sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung.
  - Das arithmetische Mittel der neuen Datenliste stimmt mit dem ursprünglichen arithmetischen Mittel überein.
  - Der Median der neuen Datenliste ist größer als der ursprüngliche Median.

Lösung zur Aufgabe 5

Erweiterte Datenliste

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$\frac{4 + 8 + 2 + 7 + 4 + x_6}{6} = 5 \quad \Rightarrow \quad x_6 = 5$$

Median: $\frac{4 + 5}{2} = 4{,}5$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Wert x_6 und der richtige Median angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

zu ergänzende Zahlen: 5 und 5

mögliche Begründung:

Damit das arithmetische Mittel $\bar{x}$ gleich bleibt, müssen die zu ergänzenden Zahlen von der Form $\bar{x} - c$ und $\bar{x} + c$ mit $c \in \mathbb{N}$ sein.

Nur für $c = 0$ und daher genau bei der Ergänzung der Datenliste durch die Werte 5 und 5 ergibt sich eine Vergrößerung des Medians. So nimmt der Median der Datenliste 2, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 8 den Wert $5 > 4{,}5$ an.
Für alle Werte $c \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ liegt $5 - c$ unterhalb und $5 + c$ oberhalb des ursprünglichen Medians, sodass auch die erweiterte Datenliste den Median 4,5 aufweist.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtigen Werte beider zu ergänzenden Zahlen und eine richtige Begründung angegeben werden.