Name:	
Klasse:	

Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche

Probereife- und Diplomprüfung/Berufsreifeprüfung

BHS

21. Mai 2020

Angewandte Mathematik

Teil-A Aufgaben

MATHAGO

FÜR MEINEN KLEINEN BRUDER – R.I.P.

$$\int_{1984}^{2020} Tanyel(t)\,dt = \infty \,\heartsuit$$

MATHAGO

Aufgabe 1

Kerzen

a) Eine bestimmte Kerze verliert im brennenden Zustand pro Viertelstunde 2mm an Höhe. Nach einem Tag ist diese Kerze zur Gänze abgebrannt. Die Funktion $h_1(t)$ gibt die Höhe h in cm der Kerze in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden an.

1) Geben Sie eine Funktionsgleichung dieser linearen Funktion h_1 an!

b) Eine andere Kerze verliert brennend in 4 Stunden 6cm an Höhe und wird nach insgesamt 16 Stunden und einer Höhe von 3cm ausgeblasen, sodass sie keine weitere Höhe mehr verliert. Die Höhe der Kerze in Abhängigkeit von der Zeit seit Anzünden dieser wird durch eine lineare Funktion h_2 beschrieben. Der Graph dieser Funktion ist im nachstehenden Koordinatensystem dargestellt. Dabei fehlt die Skalierung der horizontalen als auch der vertikalen Achse.

1) Tragen Sie die fehlenden Werte in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

c) Eine Kerzenverkäuferin am Wiener Zentralfriedhof beobachtet die monatlichen Umsätze, die sie in einem Jahr mit Kerzen macht, und möchte diesen mit Hilfe einer Polynomfunktion 3. Grades modellieren. Sie weiß, dass zum Zeitpunkt $t = 3$ der Umsatz € 4000 beträgt. Außerdem weiß sie, dass der Umsatz zum Zeitpunkt $t = 7$ am stärksten ansteigt. Ihren maximalen Umsatz von € 9000 macht sie zum Zeitpunkt $t = 11$.

$U(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ mit $1 \leq t \leq 12$

t … Zeit in Monaten

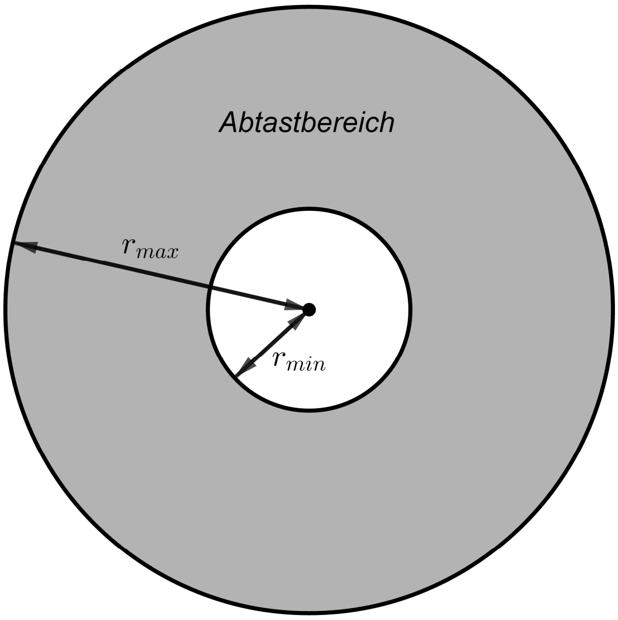
$U(t)$ … monatlicher Umsatz zum Zeitpunkt t in € 1000

1) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten dieser Polynomfunktion berechnet werden können.

Aufgabe 2

Elvis Presley

a) Elvis Presley gilt als einer der erfolgreichste Solokünstler weltweit. Bereits zu Lebzeiten verkaufte er Millionen an Schallplatten, von denen die meisten Langspielplatten ($r_{max} = 15\text{cm}$ und $r_{min} = 5{,}75\text{cm}$) oder Singles ($r_{max} = 8{,}75\text{cm}$ und $r_{min} = 5{,}75\text{cm}$) waren. Als Abtastbereich wird bei einer Schallplatte jener Kreisring förmige Flächeninhalt bezeichnet, auf dem die Musik eingraviert ist. Die nachstehende Abbildung zeigt den Abtastbereich (grau markiert) sowie r_{max} und r_{min} einer Schallplatte.



1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Abtastbereich einer Langspielplatte größer, als jener einer Single ist.

b) Krimhild besitzt eine große Sammlung an CDs von Elvis Presley. Die nachstehende Tabelle fasst ihre Sammlung zusammen:

Anzahl der Lieder auf einer CD	11	12	14	15	16	18
Anzahl der CDs	3	5	10	3	7	2

1) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der Anzahl der Lieder auf einer CD in der Sammlung von Krimhild.

c) Rosalinde hat eine Playlist auf ihrem mp3-Player, in der sich insgesamt y Oldies aus den 1950er und 1960er befinden. Von diesen y Liedern sind x Lieder von Elvis Presley dabei. Sie hat ihren mp3-Player in einem bestimmten Shuffle-Mode, sodass auf ein Lied ein beliebiges anderes Lied (auch nochmals dasselbe Lied) aus der Playlist folgt. Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Elvis Presley Lieder bei diesem Shuffle-Mode hintereinander abgespielt werden, beträgt p.

1) Stellen Sie unter Verwendung von x und p eine Formel zur Berechnung der Gesamtzahl der Lieder y in Rosalindes Playlist auf.

$y =$ ______________________________

Aufgabe 3

FC Bayern München

a) Der FC Bayern München ist der Mitgliederstärkste Fußballverein weltweit. In der nachstehenden Tabelle sind die Mitgliederzahlen seit 1979 aufgelistet.

Jahr	1979	1989	1999	2009	2019
Mitgliederzahl	6800	13039	80051	149446	293000

Anhand der Daten aus den Jahren 1979 und 2019 wurde nachstehende exponentielle Funktion modelliert:

$M(t) = 6800 \cdot e^{0{,}09408125 \cdot t}$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in Jahren seit 1979

$M(t)$ ... Anzahl der Mitglieder des FC Bayern München zum Zeitpunkt t

1) Ermitteln Sie für das Jahr 2009 die Abweichung des Funktionswertes von M von der tatsächlichen Anzahl der Mitglieder des FC Bayern München.
2) Berechnen Sie mit Hilfe von M das jährliche durchschnittliche prozentuelle Wachstum der Mitgliederanzahl des FC Bayern München.

b) Robert Lewandowski ist einer der erfolgreichsten Stürmer der Gegenwart und spielt beim FC Bayern München. Seine Trefferstatistik ist beeindruckend: Er trifft in 31% der Spiele genau einmal, in 22% der Spiele sogar mehr als einmal und in nur 47% der Spiele gar nicht.

1) Erstellen Sie ausgehend von diesen relativen Häufigkeiten ein Baumdiagramm für zwei aufeinanderfolgende Fußballspiele von Robert Lewandowski.
2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Robert Lewandowski in diesen zwei aufeinanderfolgenden Fußballspielen insgesamt höchstens einmal trifft.

c) David Alaba ist Aushängeschild des österreichischen Fußballs und seit seinem 17. Lebensjahr Spieler des FC Bayern München. Er ist unter anderem für seine Freistoßtore bekannt. Die Flugbahn eines eben solchen Freistoßes kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion 3. Grades h beschrieben werden. Dabei wird der Ball als punktförmig angenommen.

$h(x) = -0{,}002 \cdot x^3 + 0{,}05 \cdot x^2$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung des Balls von der Abschussstelle in Metern (m)

$h(x)$ ... Höhe des Balls über dem Boden an der Stelle x in m

David Alaba visiert das in 23m Entfernung von der Abschussstelle befindliche Tor der gegnerischen Mannschaft, welches eine Lattenhöhe von 2,42m hat, an. Außerdem steht in 9,15m Entfernung von der Abschussstelle eine *Mauer* aus gegnerischen Spielern, welche durch Springen eine Höhe von 2,60m erreicht. Damit dieser Freistoß ein Treffer wird, muss der Ball über die Mauer und unter der Latte des gegnerischen Tores fliegen. (Es wird davon ausgegangen, dass der gegnerische Torhüter keine Chance hat, an den Ball zu gelangen und daher vernachlässigt werden kann.)

1) Zeigen Sie nachweislich, dass David Alaba mit diesem Freistoß ein Treffer gelingt.

d) Am 18. Mai 2019 hatten zwei Bayern Legenden, Frank Ribéry (36) und Arjen Robben (35) ihr letztes Bundesliga Heimspiel für den FC Bayern München. Beide wurden im Laufe der zweiten Halbzeit eingewechselt und schossen sogar noch jeweils ein Tor. Für sie gingen Kingsley Coman (22) und Serge Gnabry (23) vom Spielfeld. Vor der Einwechslung von Ribéry und Robben betrug der Altersdurchschnitt der 11 Spieler des FC Bayern München in diesem Match genau 26 Jahre. Die Zahlen in Klammer entsprechen dem Alter der jeweiligen Spieler zum Zeitpunkt des Bundesligaspiels.

1) Berechnen Sie den neuen Altersdurchschnitt der 11 Spieler des FC Bayern München bei diesem Match nach der Einwechslung von Ribéry und Robben.

Aufgabe 4

Mario Kart

a) Beim Computerspiel Mario Kart fahren Spieler mit Fahrzeugen eine Rennstrecke. Julius möchte beim nächsten Rennen die durchschnittliche Geschwindigkeit im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ berechnen.

1) Kreuzen Sie jenen Term an, mit dem Julius diese Berechnung durchführen kann. [1 aus 5]

$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$	☐
$\frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$	☐
$\frac{s'(t_2) - s'(t_1)}{t_2 - t_1}$	☐
$\frac{a(t_2) - a(t_1)}{t_2 - t_1}$	☐
$\frac{s''(t_2) - s''(t_1)}{t_2 - t_1}$	☐

b) Augustus möchte mit Freunden in einer Karthalle ein Mario Kart Rennen nachfahren. Die Beschleunigungs-Zeit-Funktion eines solchen Karts kann als eine Polynomfunktion 2. Grades näherungsweise modelliert werden, wobei $v_0 = 0$ angenommen wird.

$a(t) = -0{,}8 \cdot t^2 + 4{,}8 \cdot t$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit seit Beginn des Kartrennens in s

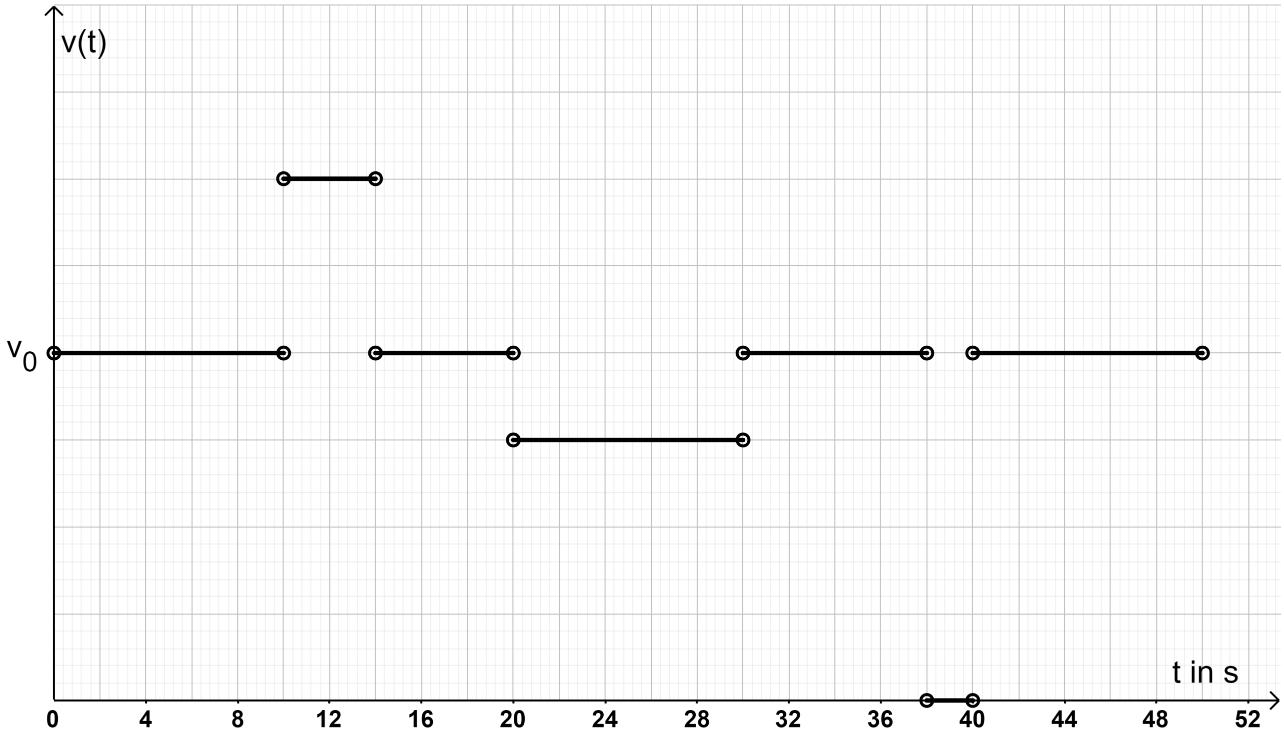
$a(t)$ ... Beschleunigung zum Zeitpunkt t in $\mathrm{m/s^2}$

1) Berechnen Sie, welche Geschwindigkeit Augustus bis zum Zeitpunkt der maximalen Beschleunigung erreicht hat. Geben Sie das Ergebnis in $\mathrm{km/h}$ an.

2) Interpretieren Sie den Ausdruck $\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = 4$ im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Bei der Mario Kart Version für Smartphones fährt man mit einer konstanten Geschwindigkeit v_0. Allerdings kann sich diese Geschwindigkeit auf Grund von Ereignissen ändern. Zündet man einen Turbo-Pilz, so fährt man für 4 Sekunden um 50% schneller. Wird man vom Blitz getroffen, schrumpft die Spielfigur für 10 Sekunden und die Geschwindigkeit sinkt in diesem Zeitraum um 25%. Wird man von einem roten Schildkrötenpanzer getroffen, so kommt man für 2 Sekunden zum Stillstand.

Tacitus fährt ein Rennen auf seinem Smartphone. Im nachstehenden Koordinatensystem ist das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm der Fahrt von Tacitus dargestellt.



1) Beschreiben Sie die Ereignisse im Rennen von Tacitus in eigenen Worten.

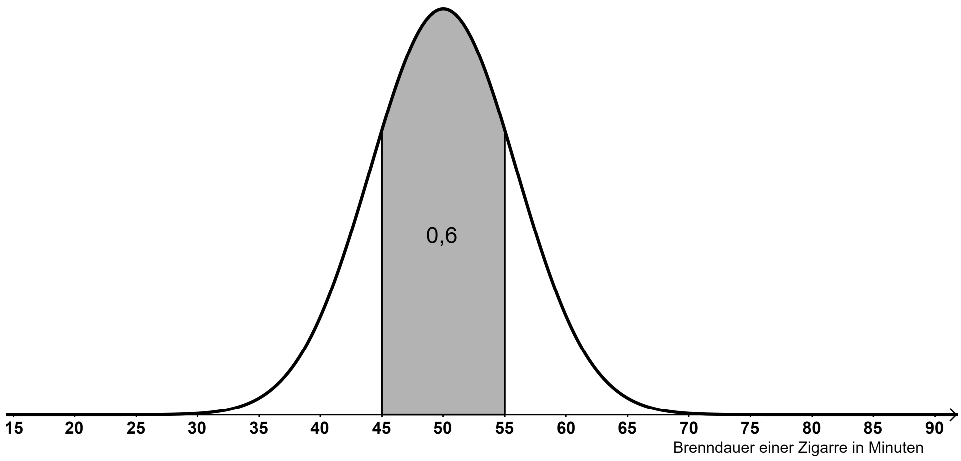
Aufgabe 5

Zigarren

a) Bei einer bestimmten Zigarrenmarke beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zigarre schlecht gerollt und somit von minderer Qualität ist, p. Deniz kauft a Schachteln mit jeweils 10 Zigarren dieser Marke darin.

   1) Beschreiben Sie, was mit $10 \cdot a \cdot (1 - p)$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

b) Unter Brenndauer einer Zigarre versteht man jene Zeit, in der man die Zigarre rauchen kann, bis diese abgebrannt ist. Die Brenndauer der Zigarrenmarke A kann näherungsweise als normalverteilt mit einem Erwartungswert $\mu = 50$ Minuten betrachtet werden. Die dazugehörige Dichtefunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Ein Zigarrenhändler behauptet, 90% aller Zigarren dieser Marke haben eine Brenndauer von mindestens einer dreiviertel Stunde.

   1) Argumentieren Sie anhand der in der Dichtefunktion markierten Fläche, dass die Aussage des Zigarrenhändlers falsch ist.

Der Erwartungswert der Brenndauer der Zigarrenmarke B ist um 20% größer als jener der Marke A. Allerdings hat die Marke B auch eine größere Standardabweichung als die Marke A.

   2) Skizzieren Sie in der obigen Abbildung einen möglichen Graphen der Dichtefunktion der Brenndauer der Zigarrenmarke B.

c) Zigarren werden in der Regel in einem Humidor aufbewahrt, welcher eine bestimmte Luftfeuchtigkeit besitzen muss, um die Qualität der darin befindlichen Zigarren zu erhalten. Um für eine entsprechende Luftfeuchtigkeit im Humidor zu sorgen, werden seit einigen Jahren sogenannte Humipacks vermehrt eingesetzt. Ein bestimmtes Humipack sorgt zu Beginn für eine relative Luftfeuchtigkeit von 75%. Allerdings nimmt die Wirkung des Humipacks mit einer Halbwertszeit von 70 Tagen exponentiell ab. Sobald die Luftfeuchtigkeit einen Wert von 50% erreicht hat, sollte man das Humipack austauschen.

   1) Berechnen Sie nach wie vielen Tagen das Humipack gewechselt werden sollte.

Aufgabe 6

Skikurs

a) Auf einem Skikurs sind m Mädchen und b Burschen einer Schule dabei.

1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils den zutreffenden Term aus A bis D zu. [2 zu 4]

Die Anzahl der Mädchen ist um 50% größer als die Anzahl der Burschen.	
Die Anzahl der Burschen ist um 50% kleiner als die Anzahl der Mädchen.	

A	$b = \frac{3}{2} \cdot m$
B	$b = \frac{1}{2} \cdot m$
C	$b = \frac{2}{3} \cdot m$
D	$b = 2 \cdot m$

b) Tristan und Isolde fahren mit ihrer Schulklasse auf Skikurs. Beide haben verbotenerweise Alkohol auf ihr jeweiliges Zimmer geschmuggelt. Beide wissen, dass die gestrenge Lehrerin, Frau Mag[a]. Maierhofer, am Abend die Zimmer inspizieren wird. Isolde geht sehr gefinkelt vor und versteckt den Alkohol so gut, dass die Wahrscheinlichkeit, dass dieser nicht gefunden wird, bei 90% liegt. Tristan ist da etwas stümperhafter, sodass sein Alkohol mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% gefunden werden kann.

Frau Mag[a]. Maierhofer macht ihre Inspektionsrunde.

1) Deuten Sie den Ausdruck $0{,}1 \cdot 0{,}4 + 0{,}9 \cdot 0{,}6$ im gegebenen Sachzusammenhang!

c) Das Spiel Flaschendrehen ist auf Skikursen und ähnlichen Schulklassenaktivitäten unter Schülerinnen und Schülern einer bestimmten Altersgruppe sehr beliebt. Dabei sitzen die Spielerinnen und Spieler in einem Kreis und eine Flasche wird gedreht. Zeigt der Flaschenhals auf eine Person, so muss diese zwischen Wahrheit und Pflicht wählen.

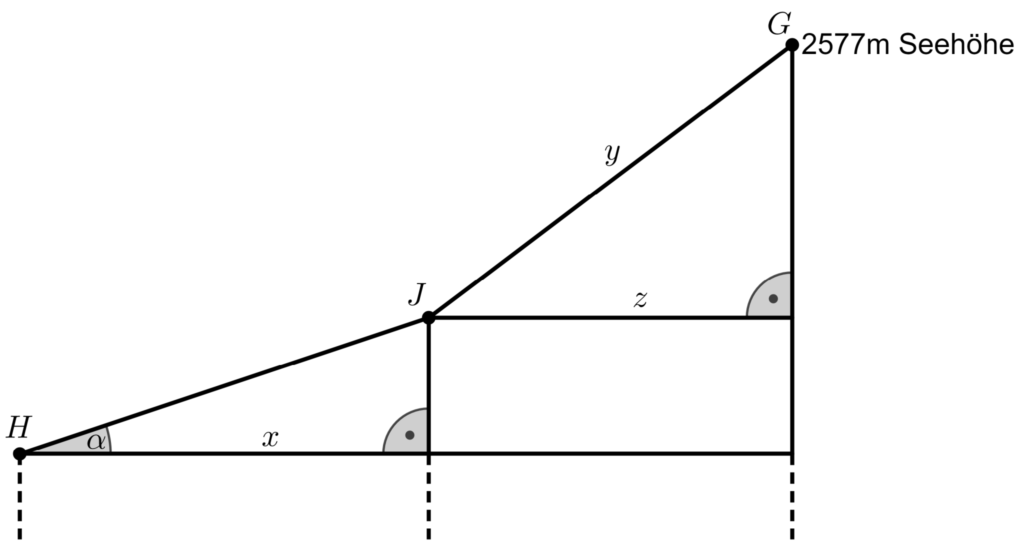
Liselotte spielt mit Freundinnen und Freunden dieses Spiel. Dabei zeigt der Flaschenhals n mal auf sie. Sie wählt mit einer konstanten Wahrscheinlichkeit p Pflicht.

Die binomialverteilte Zufallsvariable X gibt die Anzahl an, wie oft Liselotte Wahrheit wählt.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass Liselotte bei diesen n mal genau dreimal Wahrheit wählt.

$P(X = 3) =$ ______________________________

d) Die Schülerinnen und Schüler eines Skikurses sind in einem Hotel H untergebracht. Vom Hotel aus sehen Sie in einer horizontalen Entfernung $x = 420\text{m}$ unter einem Winkel $\alpha = 19°$ die Jausenstation J. Von der Jausenstation aus führt eine Seilbahn mit einer Länge $y = 1389\text{m}$ auf den Gipfel G des Berges, welcher von der Jausenstation eine horizontale Entfernung $z = 981\text{m}$ hat. Der Gipfel befindet sich in 2577m Seehöhe. Die nachstehende Skizze zeigt einen nicht maßstabsgetreuen Querschnitt.



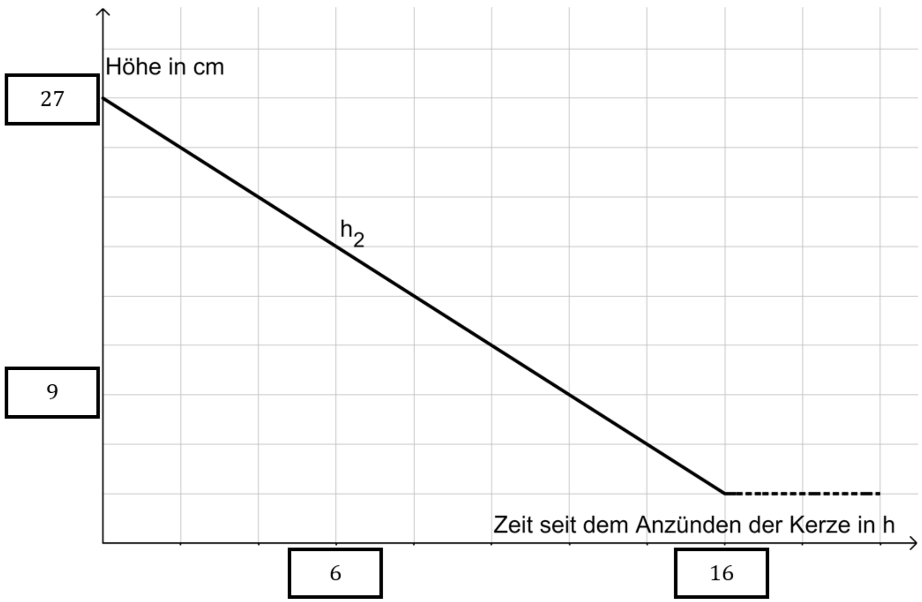
1) Berechnen Sie, in welcher Seehöhe sich das Hotel befindet.

Lösungen

Aufgabe 1)a)1)

$$h_1(t) = -0{,}8t + 19{,}2$$

Aufgabe 1)b)1)



Aufgabe 1)c)1)

$$U(3) = 4$$
$$U''(7) = 0$$
$$U(11) = 9$$
$$U'(11) = 0$$

Aufgabe 2)a)1)

$$\frac{\frac{3071}{16} \cdot \pi - \frac{87}{2} \cdot \pi}{\frac{87}{2} \cdot \pi} = 3{,}41 = 341\%$$

Aufgabe 2)b)1)

$$\overline{x} = 14{,}2 \quad \sigma = 1{,}9$$

Aufgabe 2)c)1)

$$y = \frac{x}{\sqrt{p}}$$

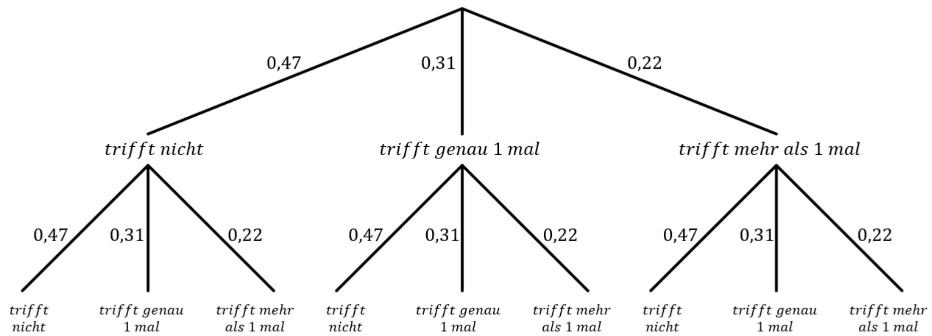
Aufgabe 3)a)1)

$$6800 \cdot e^{0{,}09408125*30} - 149446 = -35085$$

Aufgabe 3)a)2)

$$e^{0{,}09408125} = 1{,}099 \quad \rightarrow \quad 9{,}9\ \%$$

Aufgabe 3)b)1)



Aufgabe 3)b)2)

$$0{,}47 \cdot 0{,}47 + 0{,}47 \cdot 0{,}31 + 0{,}31 \cdot 0{,}47 = 0{,}512 = 51{,}2\ \%$$

Aufgabe 3)c)1)

$$h(9{,}15) = 2{,}654 > 2{,}6$$

$$h(23) = 2{,}116 < 2{,}42$$

Aufgabe 3)d)1)

$$\frac{26 \cdot 11 - 22 - 23 + 35 + 36}{11} = 28{,}4\ Jahre$$

Aufgabe 4)a)1)

$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$	X

Aufgabe 4)b)1)

$$a'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t = 3$$

$$\int_0^3 a(t)\, dt = 14{,}4\, m/s = 51{,}84\, km/h$$

Aufgabe 4)b)2)

Im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ verändert sich die Geschwindigkeit um $4\, m/s$

Aufgabe 4)c)1)

Tacitus fährt die ersten 10 Sekunden mit der Geschwindigkeit v_0. Danach zündet er einen Pilz und fährt danach wieder 6 Sekunden mit der Geschwindigkeit v_0.Nach insgesamt 20 Sekunden wird er vom Blitz getroffen. Nach dem Blitz fährt er wieder 8 Sekunden lang mit v_0 wird danach von einem Schildkrötenpanzer getroffen. Die letzten 10 Sekunden hat er wieder eine Geschwindigkeit von v_0.

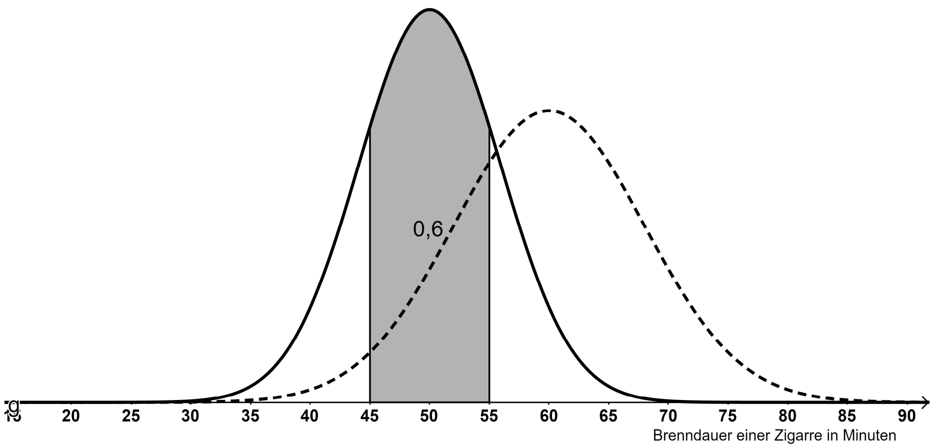
Aufgabe 5)a)1)

Es beschreibt die zu erwartende Anzahl an Zigarren mit nicht minderer Qualität beim Kauf von a Schachteln.

Aufgabe 5)b)1)

Da das eingezeichnete Intervall symmetrisch ist, liegen links davon nur noch 20%, wodurch die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 45) = 0{,}8 = 80\%$ ist und nicht 90% wie behauptet.

Aufgabe 5)b)2)



Aufgabe 5)c)1)

$$50 = 75 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{70}} \quad \rightarrow \quad t = 41\, Tage$$

Aufgabe 6)a)1)

Die Anzahl der Mädchen ist um 50% größer als die Anzahl der Burschen.	C
Die Anzahl der Burschen ist um 50% kleiner als die Anzahl der Mädchen.	B

A	$b = \frac{3}{2} \cdot m$
B	$b = \frac{1}{2} \cdot m$
C	$b = \frac{2}{3} \cdot m$
D	$b = 2 \cdot m$

Aufgabe 6)b)1)

Es wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass Frau Mag[a]. Maierhofer bei genau einem der beiden den Alkohol findet.

Aufgabe 6)c)1)

$$P(X = 3) = \binom{n}{3} \cdot (1 - p)^3 \cdot p^{n-3}$$

Aufgabe 6)d)1)

Das Hotel befindet sich in 1449m Seehöhe