Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

Mathematik

Korrekturheft

Distance-Learning-Check

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Aufgabe 1

Zahlenmengen

Lösungserwartung:

Jede rationale Zahl kann in endlicher oder periodischer Dezimalschreibweise geschrieben werden.	☒
Jede Bruchzahl ist eine komplexe Zahl.	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Aufgabe 2

Mehrwertsteuer für Hörbücher

Lösungserwartung:

$y = \frac{x}{1{,}19} \cdot 1{,}07$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

Grundkompetenz: AG 2.1

Aufgabe 3

Projektwoche

Lösungserwartung:

$x + y = 25$	☒
$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 7$	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Gleichungen angekreuzt sind.

Aufgabe 4

Vektoren

Lösungserwartung:

mögliche Berechnung:

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

$D = C + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad D = (9|11{,}5)$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Koordinaten.
Ist nur eine der angegebenen Koordinaten richtig, ist ein halber Punkt zu geben.

Aufgabe 5

Rechter Winkel

Lösungserwartung:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine richtige Lösung. Jeder Vektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{n} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, für den $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ gilt, ist als richtig zu werten.

Grundkompetenz: AG 3.5

Aufgabe 6

Gefälle einer Regenrinne

Lösungserwartung:

$h = l \cdot \sin(\alpha)$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

Grundkompetenz: AG 4.1

Aufgabe 7

Stefan-Boltzmann-Gesetz

Lösungserwartung:

①	
der Oberflächentemperatur T	☒

②	
Potenzfunktion	☒

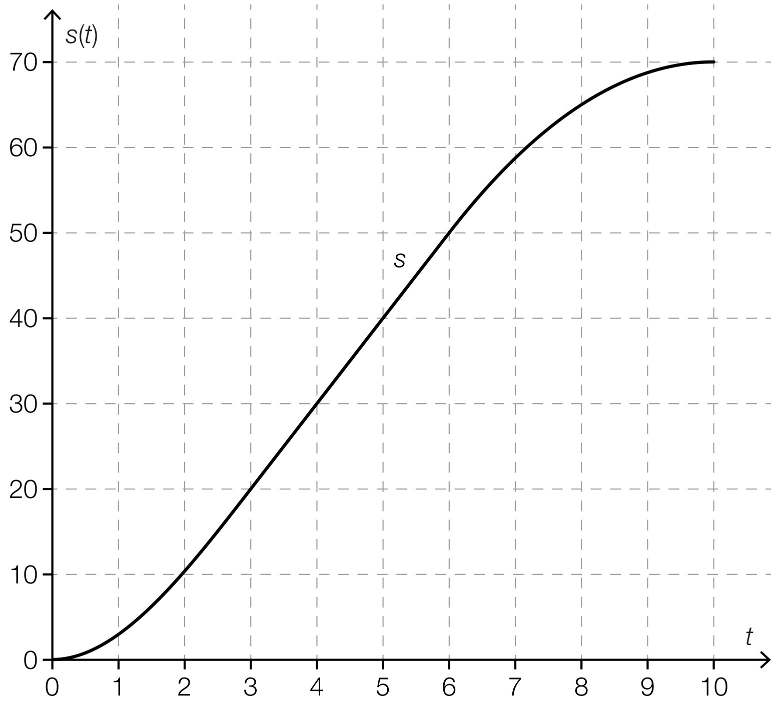
Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist. Ist nur für eine der beiden Lücken der richtige Satzteil angekreuzt, ist ein halber Punkt zu geben.

Aufgabe 8

Bewegung

Lösungserwartung:



Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die Darstellung des Graphen einer solchen Funktion s, wobei folgende Aspekte erkennbar sein müssen:

- der Graph verläuft durch die in der Tabelle angegebenen Punkte
- $s'(0) = s'(10) = 0$
- linksgekrümmt in $[0; 3)$, rechtsgekrümmt in $(6; 10]$ und linearer Verlauf in $[3; 6]$

Grundkompetenz: FA 1.5

Aufgabe 9

Funktionsgleichung einer linearen Funktion

Lösungserwartung:

$f(x) = -2 \cdot x + 1$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine richige Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.

Aufgabe 10

Heizungstage

Lösungserwartung:

$d(x) = \frac{1\,500}{x}$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für einen richtigen Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Aufgabe 11

Symmetrische Polynomfunktion

Lösungserwartung:

mögliche Begründung:

Wegen der Symmetrie muss ein weiterer lokaler Tiefpunkt vorliegen und damit auch ein lokaler Hochpunkt. Beim Vorliegen von mindestens drei Extrempunkten muss die Polynomfunktion mindestens 4. Grades sein.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine richtige Begründung.

Grundkompetenz: FA 4.4

Aufgabe 12

Sinusfunktion

Lösungserwartung:

$a = 3$
$b = 2$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte. Ist nur einer der angegebenen Werte richtig, ist ein halber Punkt zu geben.

Aufgabe 13

Leistungsverbesserung

Lösungserwartung:

erste Person: Person B
zweite Person: Person A

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die jeweils richtige Auswahl der beiden Personen. Ist die Auswahl nur für eine Person richtig, ist ein halber Punkt zu geben.

Aufgabe 14

Wasserstand eines Flusses

Lösungserwartung:

mögliche Interpretation:

Der Ausdruck beschreibt die Änderungsgeschwindigkeit (momentane Änderungsrate) in m/h des Wasserstands $W(t)$ zum Zeitpunkt $t = 6$ an dieser Messstelle des Flusses.

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für eine richtige Interpretation, wobei die Einheit „m/h" nicht angeführt sein muss.

Grundkompetenz: AN 1.2

Aufgabe 15

Kapitalsparbuch

Lösungserwartung:

Frau Fröhlich zahlt jährlich € 5.000 auf ihr Kapitalsparbuch ein.	☒
Der relative jährliche Zuwachs des am Ausdruck ausgewiesenen Kapitals ist größer als 3 %.	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Aufgabe 16

Differenzierbare Funktion

Lösungserwartung:

$f''(6) = 0$	☒
$f''(11) < 0$	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Aufgabe 17

Bestimmen eines Koeffizienten

Lösungserwartung:

$a = -3$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Aufgabe 18

Beschleunigung

Lösungserwartung:

Die Geschwindigkeit des Objekts hat in diesem Zeitintervall um 2 m/s zugenommen.	☒

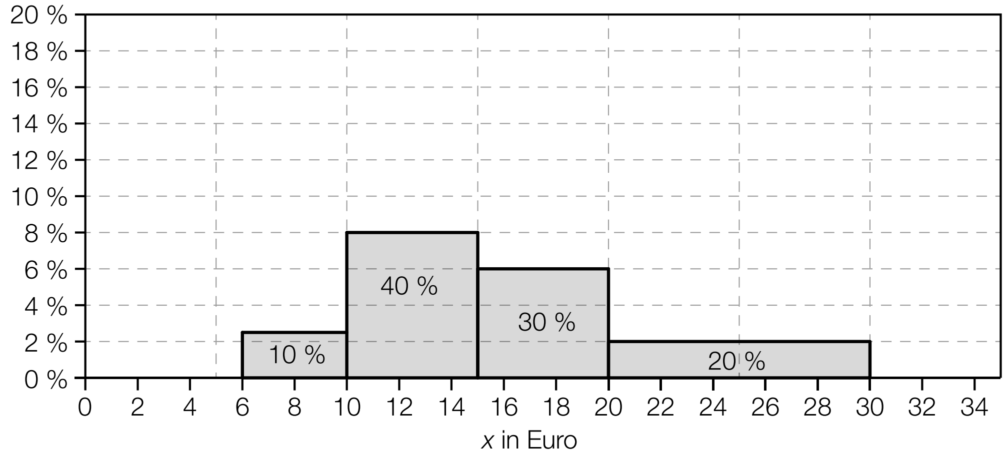
Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Aussage angekreuzt ist.

Aufgabe 19

Histogramm

Lösungserwartung:



Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Ergänzung der fehlenden Säule, wobei die Beschriftung „20 %“ nicht angegeben sein muss.

Grundkompetenz: WS 1.2

Aufgabe 20

Statistische Kennzahlen

Lösungserwartung:

Spannweite	☒
arithmetisches Mittel	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen statistischen Kennzahlen angekreuzt sind.

Aufgabe 21

Schätzwert für eine Wahrscheinlichkeit

Lösungserwartung:

$p = \frac{13}{300} = 0{,}04\dot{3}$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 22

Aussagen zu einer Zufallsvariablen

Lösungserwartung:

Der Erwartungswert von X ist 20.	☒
$P(10 \leq X \leq 30) = 1$	☒

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Aufgabe 23

Massenproduktion

Lösungserwartung:

mögliche Vorgehensweise:

Die (binomialverteilte) Zufallsvariable X (mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0{,}06$) beschreibt die Anzahl der mangelhaften Stücke in dieser Packung.

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}0566... \approx 0{,}057$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

Grundkompetenz: WS 3.2

Aufgabe 24

Konfidenzintervall verkürzen

Lösungserwartung:

$n > 500$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

Grundkompetenz: WS 4.1

Aufgabe 25 (Teil 2)

Polynomfunktion dritten Grades

a) **Lösungserwartung:**

a1) mögliche Vorgehensweise:

$f_t'(x) = \frac{3}{t} \cdot x^2 - 4 \cdot x + t$

$3 \cdot x^2 - 4 \cdot t \cdot x + t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{t}{3};\ x_2 = t$

a2) mögliche Beschreibung:

An der Stelle $x = t$ hat f_t eine Nullstelle und ein lokales Minimum.

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Ausgleichspunkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
Grundkompetenz: AN 3.3

a2) Ein Punkt für eine richtige Beschreibung.

b) **Lösungserwartung:**

b2) mögliche Vorgehensweise:

$f_t''(x) = \frac{6}{t} \cdot x - 4$

$f_t''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{2}{3} \cdot t$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$f_t''(0) = \frac{6}{t} \cdot 0 - 4 = -4$

Die zweite Ableitungsfunktion hat an der Stelle $x = 0$ den Wert -4 und ist somit unabhängig vom Parameter t.

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b2) Ein Punkt für einen richtigen rechnerischen Nachweis.

c) Lösungserwartung:

c1) mögliche Vorgehensweise:
$A(t) = \int_0^t f_t(x)\,\mathrm{d}x = \frac{t^3}{4} - \frac{2 \cdot t^3}{3} + \frac{t^3}{2} = \frac{t^3}{12}$
Die Funktion A ist eine Funktion dritten Grades.

c2) $A(t) : A(2 \cdot t) = 1 : 8$

Lösungsschlüssel:

c1) Ein Punkt für einen richtigen Funktionsterm und die Angabe des richtigen Grades von A. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
c2) Ein Punkt für ein richtiges Verhältnis.

Aufgabe 26 (Teil 2)

Einsatz von Antibiotika

a) **Lösungserwartung:**

a1) mögliche Vorgehensweise:

$B'(t) = b \cdot (k - c \cdot t) \cdot e^{k \cdot t - \frac{c}{2} \cdot t^2}$

$B'(t_1) = 0$

$k - c \cdot t_1 = 0$

$t_1 = \frac{k}{c}$

a2) mögliche Beschreibung:

Die Extremstelle t_1 wird zu einem früheren Zeitpunkt erreicht.

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

a2) Ein Punkt für eine richtige Beschreibung.

b) **Lösungserwartung:**

b1) mögliche Vorgehensweise:

$20 = 20 \cdot e^{2 \cdot t - 0{,}45 \cdot t^2}$

$1 = e^{2 \cdot t - 0{,}45 \cdot t^2}$

$0 = 2 \cdot t - 0{,}45 \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 4{,}\dot{4}$ h

b2) mögliche Deutung:

$B_1'(t_2)$ gibt die (momentane) Abnahmegeschwindigkeit in Bakterien pro Stunde zum Zeitpunkt t_2 an.

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „h“ nicht angeführt sein muss.
Grundkompetenz: FA 5.2

b2) Ein Punkt für eine richtige Deutung.

c) **Lösungserwartung:**

c1) mögliche Vorgehensweise:
$B_2''(t) = 5 \cdot (t^2 - 8 \cdot t + 15) \cdot e^{4 \cdot t - \frac{t^2}{2}}$

$t^2 - 8 \cdot t + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 3;\ t_2 = 5$

Es gilt:

$B_2'(3) > 0$

und

$B_2'(5) < 0$

(und $B_2'''(5) \neq 0$)

Zum Zeitpunkt $t_3 = 5$ findet die stärkste Abnahme der Bakterienpopulation statt.

c2) $\frac{B_2(5)}{B_2(4)} = 0{,}60653... \approx 0{,}6065$
Zum Zeitpunkt $t_3 = 5$ sind noch ca. 60,65 % der maximalen Anzahl an Bakterien vorhanden.

Lösungsschlüssel:

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „h“ nicht angeführt sein muss.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 27 (Teil 2)

Brasilien

a) Lösungserwartung:

a1) Im Zeitintervall [1970; 1980] steigt die Einwohnerzahl pro Jahr um ca. 2,515 %, im Zeitintervall [1991; 2000] steigt die Einwohnerzahl pro Jahr um ca. 1,607 %.

a2) mögliche Begründung:
Damit eine Beschreibung durch eine Exponentialfunktion angemessen ist, müsste die relative jährliche Zunahme der Einwohnerzahl in den beiden betrachteten Zeitintervallen annähernd gleich sein. Im Zeitintervall [1970; 1980] ist die relative jährliche Zunahme der Einwohnerzahl mit ca. 2,5 % deutlich größer als im Zeitintervall [1991; 2000], wo es nur mehr ca. 1,6 % beträgt. Daher wäre eine Beschreibung der Entwicklung der Einwohnerzahl durch eine Exponentialfunktion nicht angemessen.

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Ausgleichspunkt für eine richtige Deutung der beiden Werte.
Grundkompetenz: FA 5.3

a2) Ein Punkt für eine richtige Begründung.

b) Lösungserwartung:

b1) mögliche Vorgehensweise:

$f(t) = 146\,917\,459 + k \cdot t$

$k = \frac{190\,755\,799 - 146\,917\,459}{19} \approx 2\,307\,281$

$f(t) = 146\,917\,459 + 2\,307\,281 \cdot t$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$f(23) = 199\,984\,922$

$\frac{199\,984\,922}{202\,740\,000} \approx 0{,}986$

Die Abweichung zur Vorhersage beträgt ca. 1,4 %.

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Punkt für eine richtige Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.

b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Abweichung auch als negativer Wert angegeben sein kann.

c) Lösungserwartung:

c1) mögliche Deutung:

Der angeführte Ausdruck gibt die Anzahl derjenigen Personen an, die die Einwohnerzahl x_n im Zeitintervall [n; n + 1] aufgrund von Geburten und/oder Todesfällen erhöhen (bzw. verringern).

c2) mögliche Vorgehensweise:

$x_{2015} \leq 1{,}01 \cdot x_{2014}$

$x_{2014} + x_{2014} \cdot \frac{14{,}6 - 6{,}6}{1\,000} + m_{2014} \leq 1{,}01 \cdot x_{2014}$

daher

$m_{2014} \leq \left(1{,}01 - 1 - \frac{14{,}6 - 6{,}6}{1\,000}\right) \cdot x_{2014}$

$m_{2014} \leq 0{,}002 \cdot 202\,740\,000 = 405\,480$

Damit die Einwohnerzahl im Jahr 2015 gegenüber der Einwohnerzahl im Jahr davor maximal um 1 % größer wird, dürfen höchstens 405 480 Personen mehr zuwandern als abwandern.

Lösungsschlüssel:

c1) Ein Punkt für eine richtige Deutung.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

Aufgabe 28

Würfel mit unterschiedlichen Zahlen

a) Lösungserwartung:

a1) mögliche Werte für Y: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

a2) Bei Y hat jeder Wert die gleiche Wahrscheinlichkeit $\left(= \frac{1}{9}\right)$, bei X hat 4 die größte Wahrscheinlichkeit $\left(= 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\right)$. Der Unterschied ist bei 4 am größten, er beträgt $\frac{2}{9}$.
oder:
Die Wahrscheinlichkeit für 4 ist bei Herrn Fischer dreimal so groß wie bei Frau Fischer.

Lösungsschlüssel:

a1) Ein Ausgleichspunkt für die vollständige Angabe der richtigen Werte.
a2) Ein Punkt für die Angabe des gesuchten Wertes und der richtigen Lösung.

b) Lösungserwartung:

b1) mögliche Berechnung:
Zufallsvariable X = Anzahl der Spiele, bei denen die Summe der drei geworfenen Zahlen genau null ist

P(„Summe der drei geworfenen Zahlen ist null“) $= p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{1}{9}$

Binomialverteilung mit den Parametern $n = 5$, $k = 2$, $p = \frac{1}{9}$

$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^3 \approx 0{,}087 \quad \Rightarrow$ Die gesuchte Wahrscheinlichkeit liegt bei ca. 8,7 %.

b2) mögliche Berechnung:
x ... Auszahlung für das Würfeln einer negativen Summe
$2 \cdot \frac{1}{9} + x \cdot \frac{1}{27} < 2 \;\Rightarrow\; x < 48$

Die Auszahlung für das Würfeln einer negativen Summe darf höchstens € 48 betragen, damit der Anbieter des Spiels langfristig mit keinem Verlust rechnen muss.

Lösungsschlüssel:

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€“ nicht angegeben sein muss.

c) Lösungserwartung:

c1) $n = 100$ und $p = 0,5$

Erwartungswert: $E(Z) = 50$
Standardabweichung: $\sqrt{V(Z)} = 5$

c2) mögliche Berechnung
Die Summe ist größer als 350, wenn die Anzahl der Sechser mindestens 59 ist.

$n = 100$ und $p = 0,5$

$P(Z \geq 59) = 0,0443... \approx 4,4\ \%$

Lösungsschlüssel:

c1) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,035; 0,045]