MATHAGO

MATHEMATIK MATURA
CORONA KURS
TEIL 9 VON 15
INTEGRALRECHNUNG

Ableitungsfunktion und Stammfunktion*

Aufgabennummer: 1_723	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.1

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion.

Aufgabenstellung:

Zwei der folgenden Aussagen über die Funktion f treffen auf jeden Fall zu.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Die Funktion f hat genau eine Stammfunktion F.	☐
Die Funktion f hat genau eine Ableitungsfunktion f'.	☐
Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt: $f' = F$.	☐
Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt: $F'' = f'$.	☐
Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt: $\int_0^1 F(x)\,dx = f(1) - f(0)$.	☐

Zusammenhang zwischen Funktion und Stammfunktionen*

Aufgabennummer: 1_676	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.1

Die Funktionen g und h sind unterschiedliche Stammfunktionen einer Polynomfunktion f vom Grad $n \geq 1$.

Aufgabenstellung:

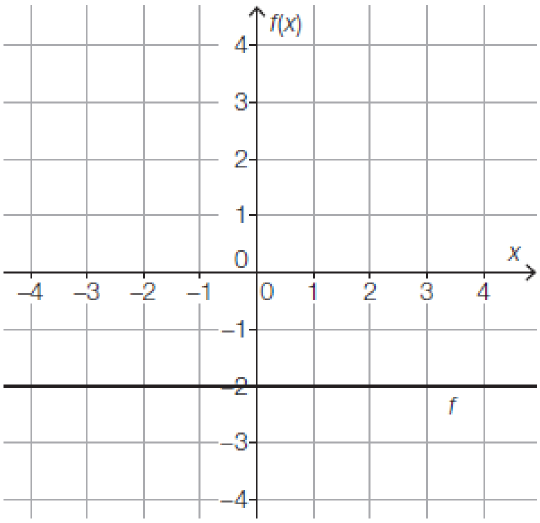
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$g'(x) = h'(x)$	☐
$g(x) + h(x) = c,\ c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	☐
$\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = f(2) - f(0)$	☐
$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = h(2) - h(0)$	☐
$g(x) = c \cdot h(x),\ c \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$	☐

Stammfunktion einer konstanten Funktion*

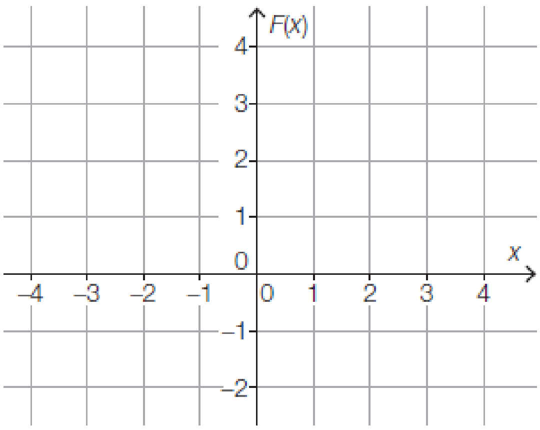
Aufgabennummer: 1_431	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AN 3.2

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer konstanten Funktion f dargestellt.



Aufgabenstellung:

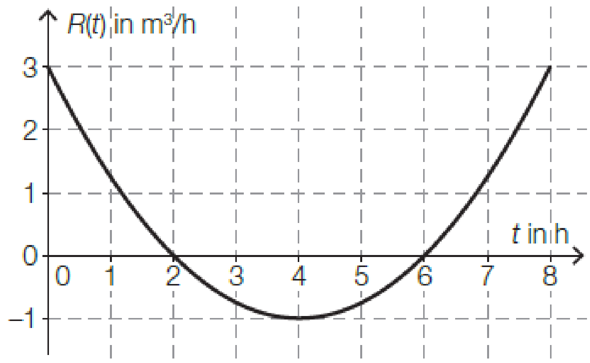
Der Graph einer Stammfunktion F von f verläuft durch den Punkt $P = (1|1)$.
Zeichnen Sie den Graphen der Stammfunktion F im nachstehenden Koordinatensystem ein!



Wassermenge in einem Behälter*

Aufgabennummer: 1_548	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 4.3

In der nachstehenden Abbildung ist die momentane Änderungsrate R der Wassermenge in einem Behälter (in m^3/h) in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt.



Aufgabenstellung:

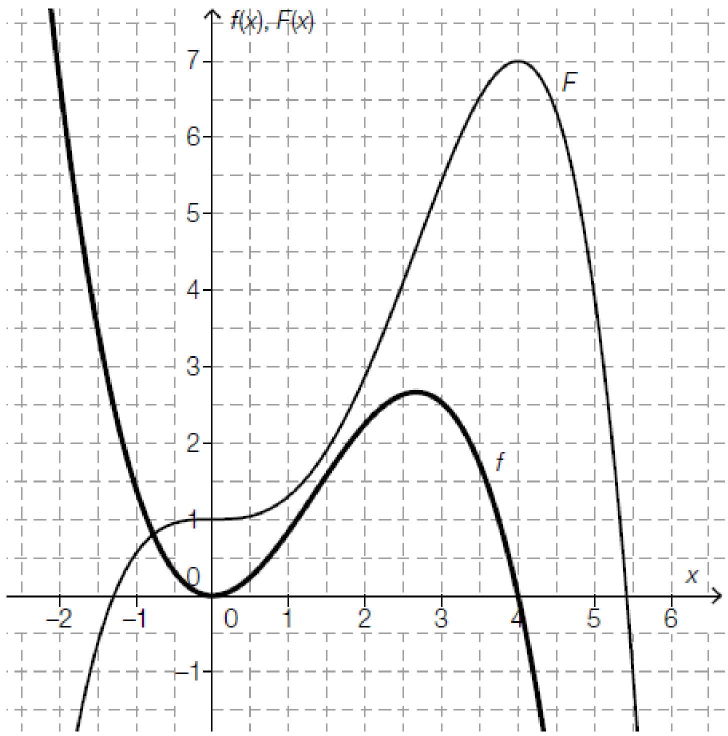
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen über die Wassermenge im Behälter an!

Zum Zeitpunkt $t = 6$ befindet sich weniger Wasser im Behälter als zum Zeitpunkt $t = 2$.	☐
Im Zeitintervall (6; 8) nimmt die Wassermenge im Behälter zu.	☐
Zum Zeitpunkt $t = 2$ befindet sich kein Wasser im Behälter.	☐
Im Zeitintervall (0; 2) nimmt die Wassermenge im Behälter ab.	☐
Zum Zeitpunkt $t = 4$ befindet sich am wenigsten Wasser im Behälter.	☐

Flächeninhalt*

Aufgabennummer: 1_604	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 3.2

In der nachstehenden Abbildung sind der Graph einer Polynomfunktion f dritten Grades und der Graph einer ihrer Stammfunktionen F dargestellt.



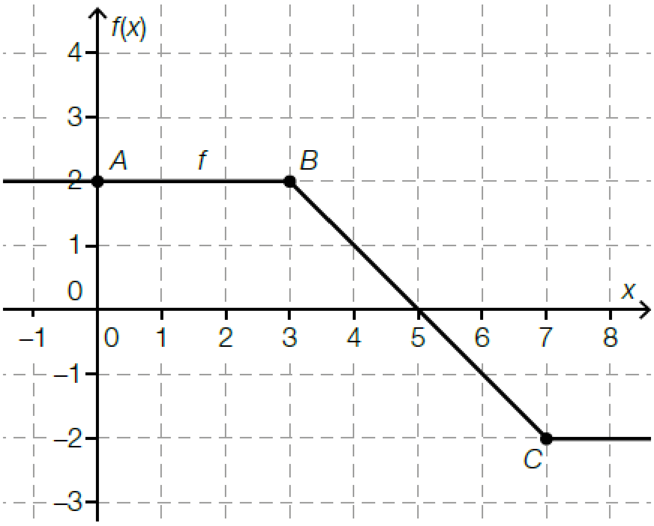
Aufgabenstellung:

Der Graph von f und die positive x-Achse begrenzen im Intervall [0; 4] ein endliches Flächenstück. Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Flächenstücks!

Bestimmtes Integral*

Aufgabennummer: 1_654	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 4.2

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer abschnittsweise linearen Funktion f dargestellt. Die Koordinaten der Punkte A, B und C des Graphen der Funktion sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

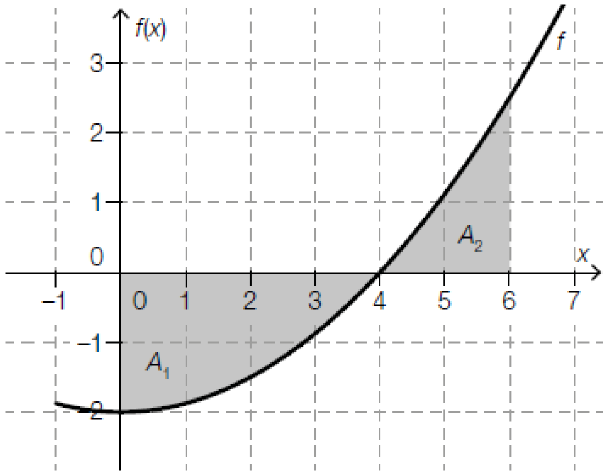
Ermitteln Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x$!

$\int_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x =$ ____________________

Wert eines bestimmten Integrals*

Aufgabennummer: 1_679	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 4.3

Nachstehend ist der Graph einer Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dargestellt. Zusätzlich sind zwei Flächen gekennzeichnet.
Die Fläche A_1 wird vom Graphen der Funktion f und von der x-Achse im Intervall [0; 4] begrenzt und hat einen Flächeninhalt von $\frac{16}{3}$ Flächeneinheiten.
Die Fläche A_2 wird vom Graphen der Funktion f und von der x-Achse im Intervall [4; 6] begrenzt und hat einen Flächeninhalt von $\frac{7}{3}$ Flächeneinheiten.



Aufgabenstellung:

Geben Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^6 f(x)\,dx$ an!

$\int_0^6 f(x)\,dx =$ ____________

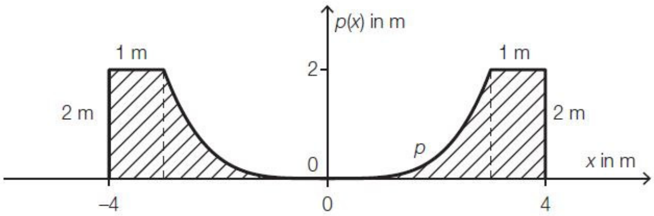
Skatepark (1) * (A_194)

c) Für eine *Halfpipe* soll in einem Skatepark Material aufgeschüttet werden. Ein Teil des Verlaufs der Halfpipe im Querschnitt lässt sich annähernd durch die Funktion p beschreiben:

$p(x) = \frac{2}{81} \cdot x^4$ mit $-3 \leq x \leq 3$

x ... horizontale Koordinate in Metern (m)
$p(x)$ ... Höhe an der Stelle x in m

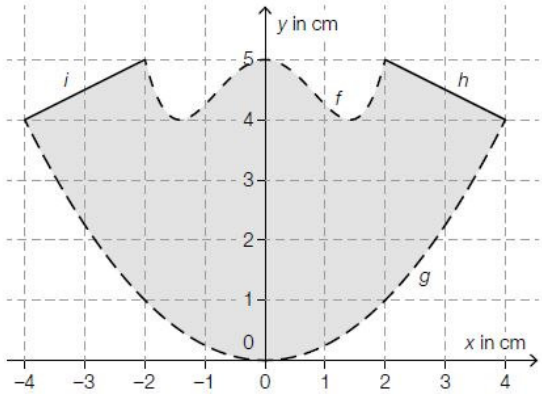
Die nachstehende Abbildung zeigt die Querschnittsfläche der Halfpipe.



– Ermitteln Sie den Inhalt der schraffierten Querschnittsfläche.

Skulptur * (B_464)

Eine Skulptur wird von oben betrachtet. Die Deckfläche ist waagrecht und eben. Sie ist in der nachstehenden Abbildung in einem Koordinatensystem dargestellt. Dabei ist die Deckfläche symmetrisch zur y-Achse und wird durch die Graphen der Funktionen f, g, h und i begrenzt.

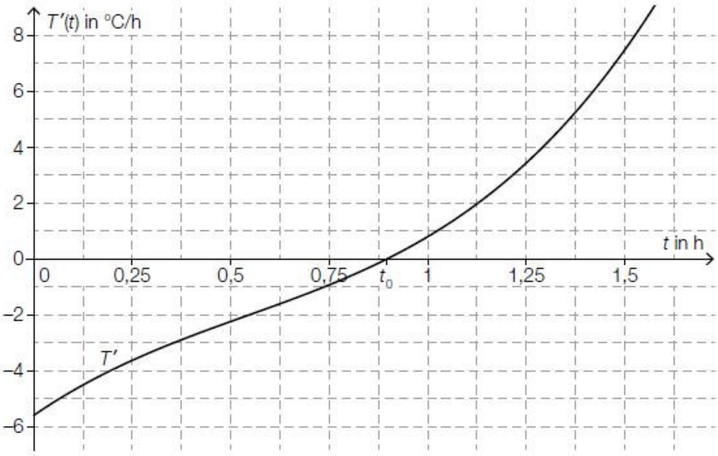


a) **1)** Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A der grau markierten Deckfläche.

$A =$ ______________________________

Gewitter * (A_071)

c) Während eines Nachmittags, an dem es ein Gewitter gab, wurde die Veränderung der Temperatur ermittelt. Die Funktion T' beschreibt die momentane Änderungsrate der Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit t (siehe nachstehende Abbildung).



t … Zeit seit Beginn der Messung in h
$T'(t)$ … momentane Änderungsrate der Temperatur zur Zeit t in °C/h

Die Funktion T' hat an der Stelle t_0 eine Nullstelle (siehe obige Abbildung).

1) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t_0 eine Maximumstelle.	☐
Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t_0 eine Minimumstelle.	☐
Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t_0 eine Nullstelle.	☐
Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t_0 eine Wendestelle.	☐
Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t_0 eine positive Steigung.	☐

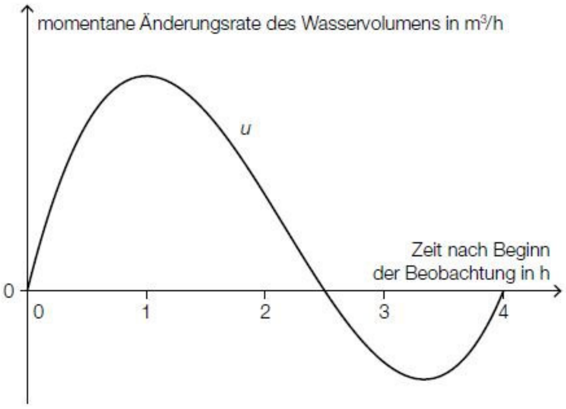
Die absolute Temperaturänderung in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ kann durch das Integral $\int_{t_1}^{t_2} T'(t)\,dt$ berechnet werden.

2) Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung näherungsweise die absolute Temperaturänderung im Zeitintervall [1,25; 1,5].

Stausee * (A_271)

a) Das Wasservolumen in einem Stausee ändert sich aufgrund von verschiedenen Einflüssen, wie z. B. Niederschlägen, Zuflüssen und Wasserentnahmen.

Zu Beginn einer Beobachtung beträgt das Wasservolumen im Stausee $1{,}5 \cdot 10^8$ m³. Die momentane Änderungsrate des Wasservolumens kann im Zeitintervall [0; 4] näherungsweise durch eine Funktion u beschrieben werden, deren Graph in der nachstehenden Abbildung dargestellt ist.



1) Interpretieren Sie unter Angabe der entsprechenden Einheit, was mit dem folgenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird:
$1{,}5 \cdot 10^8 + \int_0^4 u(t)\,dt$

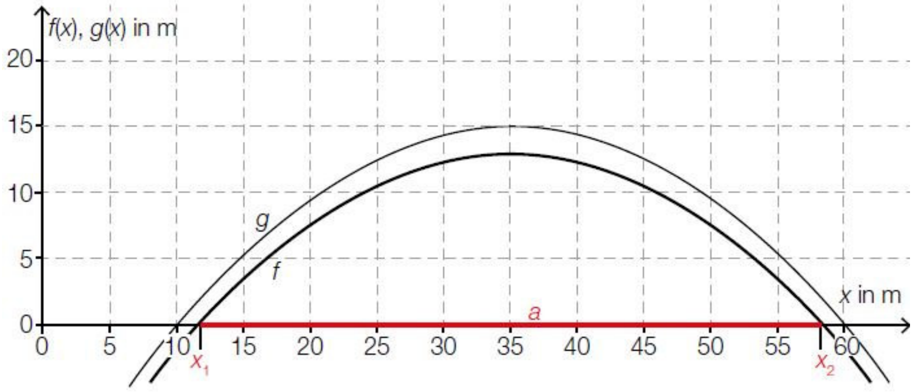
2) Argumentieren Sie mithilfe des Funktionsgraphen, dass das Wasservolumen im Stausee im Zeitintervall [1; 2] zunimmt.

Brueckenboegen (A_216)

Der innere Teil eines Brückenbogens kann durch die Funktion f beschrieben werden. Der äußere Teil des Brückenbogens kann durch die Funktion g beschrieben werden.

$f(x) = -\frac{3}{125} \cdot x^2 + \frac{42}{25} \cdot x - \frac{82}{5}$

x, $f(x)$, $g(x)$ … Koordinaten in m



Der Flächeninhalt zwischen den beiden Teilen des Brückenbogens und der x-Achse soll berechnet werden.

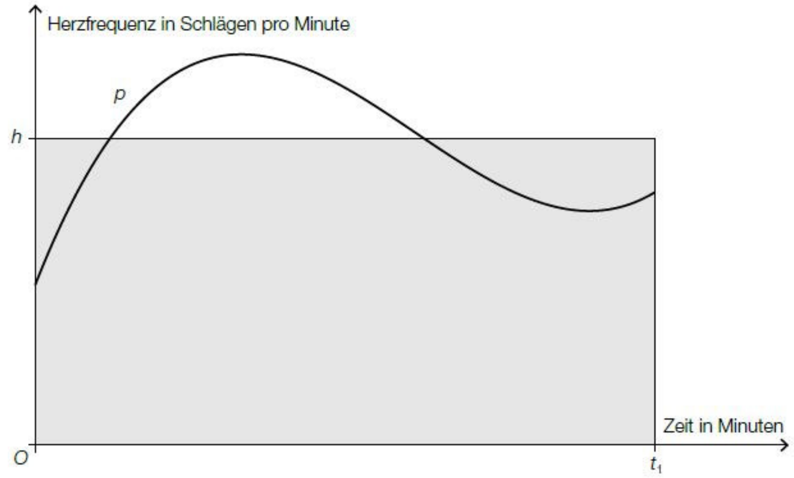
– Kreuzen Sie diejenige Formel an, die zur Berechnung dieses Flächeninhalts verwendet werden kann. *[1 aus 5]*

$\int_{10}^{60} (g(x) - f(x))\,dx$	☐
$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx - \int_{10}^{60} g(x)\,dx$	☐
$\int_{10}^{60} g(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$	☐
$\int_{x_1}^{x_2} (g(x) - f(x))\,dx$	☐
$\int_{10}^{60} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$	☐

Wings for Life World Run * (B_022)

b) Der zeitliche Verlauf der Herzfrequenz einer Läuferin kann näherungsweise durch eine Funktion p beschrieben werden.

Der Graph von p ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt. Der Flächeninhalt des grau markierten Rechtecks entspricht dem Inhalt der Fläche unter dem Funktionsgraphen von p im Intervall $[0; t_1]$.

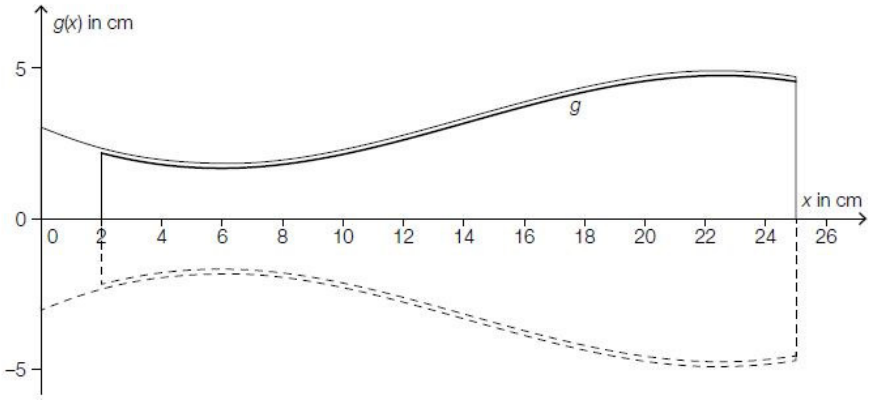


– Interpretieren Sie die Bedeutung von h im gegebenen Sachzusammenhang.
– Erstellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Formel zur Berechnung von h, wenn die Funktion p bekannt ist.

$h =$ ____________________________________

Gastwirtschaft* (B_443)

b) Die Form eines Weizenbierglases kann näherungsweise durch die Rotation des Graphen der Funktion g um die x-Achse dargestellt werden (siehe nachstehende Abbildung).



Es gilt:

$g(x) = -0{,}00108 \cdot x^3 + 0{,}046 \cdot x^2 - 0{,}4367 \cdot x + 3$ mit $2 \leq x \leq 25$

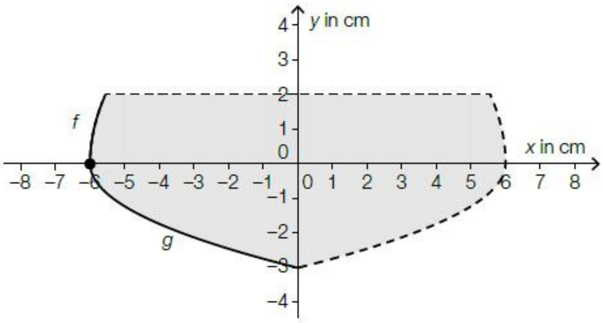
x, $g(x)$ ... Koordinaten in cm

1) Berechnen Sie den kleinsten Innendurchmesser des Weizenbierglases.

2) Berechnen Sie das Füllvolumen des Weizenbierglases in Litern.

Champagner * (B_215)

b) Ein Champagnerglas (ohne Stiel, Glasdicke nicht berücksichtigt) kann näherungsweise durch die Rotation des Graphen der Wurzelfunktion f und des Graphen der Wurzelfunktion g um die y-Achse beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



Für f gilt: $y = 3 \cdot \sqrt{x + a}$
Für g gilt: $y = -\sqrt{1{,}5 \cdot x + 9}$

1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Wert für a ab.

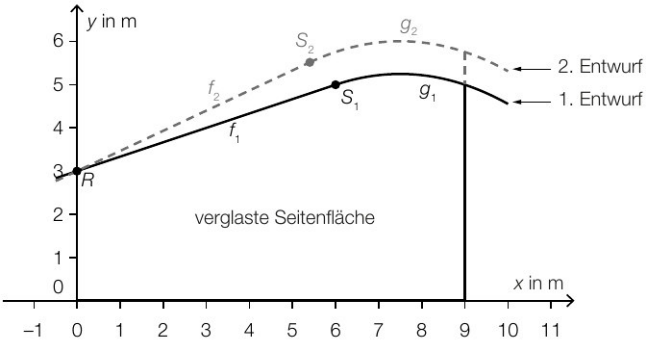
2) Berechnen Sie das Füllvolumen des Champagnerglases.

In das Champagnerglas werden 150 ml Champagner gefüllt.

3) Berechnen Sie die zugehörige Füllhöhe.

Ausstellungshalle * (B_116)

In der nachstehenden Abbildung sind 2 verschiedene Entwürfe für eine Ausstellungshalle in der Seitenansicht dargestellt.



a) Im 1. Entwurf wird die Dachlinie mithilfe der Funktionen f_1 und g_1 beschrieben:

$f_1(x) = 3 + \frac{x}{3}$ mit $-0{,}5 \leq x \leq 6$

$g_1(x) = -\frac{1}{9} \cdot x^2 + \frac{5}{3} \cdot x - 1$ mit $6 \leq x \leq 10$

1) Berechnen Sie die Länge der Dachlinie im Intervall [–0,5; 10].