Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Jänner 2020

Mathematik

Kompensationsprüfung 2
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

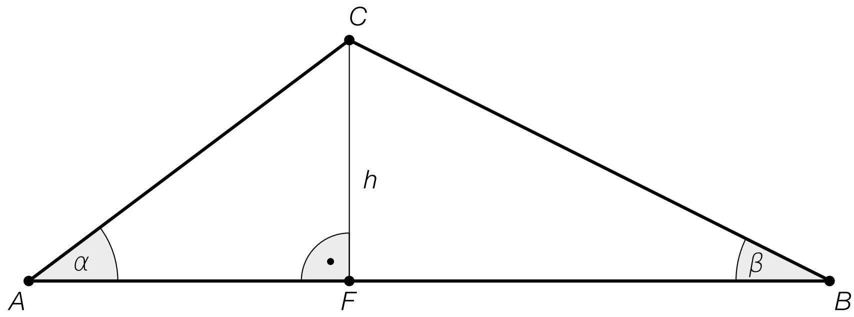
Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Trigonometrie

Gegeben ist ein Dreieck *ABC*. Der Fußpunkt *F* der Höhe *h*, der näher beim Eckpunkt *A* liegt, teilt die Strecke *AB* im Verhältnis 2 : 5.



Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie für $h = 7$ cm und $\overline{AB} = 21$ cm die Größe des Winkels β.

Leitfrage:

– Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck *ABC* nicht rechtwinkelig ist.

Der Punkt *C* wird so verändert, dass der Fußpunkt *F* der Höhe *h* links vom Eckpunkt *A* liegt, wobei die Länge der Höhe *h* und die Länge der Strecke *AB* unverändert bleiben.

– Geben Sie an, ob dadurch der Wert von $\tan(\beta)$ größer oder kleiner wird, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung zur Aufgabe 1

Trigonometrie

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\overline{FB} = \frac{21}{7} \cdot 5 = 15$

$\tan(\beta) = \frac{h}{\overline{FB}} = \frac{7}{15} \quad \Rightarrow \quad \beta = 25{,}016...° \approx 25°$

Die Größe des gesuchten Winkels beträgt ca. 25°.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Winkel angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

möglicher rechnerischer Nachweis durch indirekte Beweisführung:
Unter der Annahme, dass ABC rechtwinkelig ist, müsste laut pythagoräischem Lehrsatz gelten:
$225 + h^2 + 36 + h^2 = 21^2 \quad \Rightarrow \quad 261 + 2 \cdot h^2 = 441 \quad \Rightarrow \quad h^2 = 90$
Das ist ein Widerspruch zu $h = 7$. $\Rightarrow$ Das Dreieck ABC ist nicht rechtwinkelig.

Der Wert von $\tan(\beta)$ wird kleiner.

mögliche Begründung:
Da β kleiner wird und der Tangens für $\beta \in [0°; 90°]$ streng monoton wachsend ist, wird auch $\tan(\beta)$ kleiner.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn rechnerisch korrekt gezeigt wird, dass das Dreieck ABC nicht rechtwinkelig ist, und die richtige Veränderung des Wertes von $\tan(\beta)$ angegeben und richtig begründet wird.

Aufgabe 2

Farbpulver

Gibt man 500 g Farbpulver in einen Krug mit Wasser, dann sind nach einer Minute 70 g dieses Pulvers aufgelöst.

Die aufgelöste Menge an Farbpulver wird durch die Funktion p mit $p(t) = 500 - 500 \cdot e^{k \cdot t}$ in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert (t in min, $p(t)$ in g).

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie den Wert von k.

Leitfrage:

Die Funktion p erfüllt die Differenzengleichung $p(t + 1) - p(t) = a \cdot (500 - p(t))$ mit $a \in \mathbb{R}$.

– Berechnen Sie den Wert von a und deuten Sie diesen im gegebenen Kontext.

Lösung zur Aufgabe 2

Farbpulver

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$70 = 500 - 500 \cdot e^{k \cdot 1}$
$k = \ln\left(\frac{43}{50}\right) = -0{,}150823... \approx -0{,}15082$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Wert von k angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$p(1) - p(0) = a \cdot (500 - p(0))$
$70 = a \cdot (500 - 0) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{70}{500} = 0{,}14$

In jeder Minute lösen sich 14 % der noch nicht aufgelösten Menge im Wasser auf.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Wert von a und eine richtige Deutung angegeben werden.

Aufgabe 3

Extremstellen bei Polynomfunktionen vierten Grades

Eine Polynomfunktion f vierten Grades hat die Gleichung $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ mit $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Aufgabenstellung:

– Begründen Sie, warum f höchstens 3 Extremstellen haben kann.

Leitfrage:

Es gilt: $g(x) = p \cdot x^4 + q \cdot x^2 + r$ mit $p, q, r \in \mathbb{R}$ und $p > 0$.

– Geben Sie jede Anzahl an lokalen Extremstellen an, die g haben kann.
– Zeigen Sie rechnerisch, wie das Vorzeichen von q die Anzahl an Extremstellen beeinflusst, und skizzieren Sie für jeden dieser Fälle einen typischen Verlauf des Graphen.

Lösung zur Aufgabe 3

Extremstellen bei Polynomfunktionen vierten Grades

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

mögliche Begründung:

$f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d$
Die Gleichung $4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d = 0$ ist eine Gleichung dritten Grades und kann höchstens drei Lösungen haben. $\Rightarrow$ Es gibt höchstens drei Extremstellen.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn richtig begründet wird, warum höchstens drei Extremstellen möglich sind.

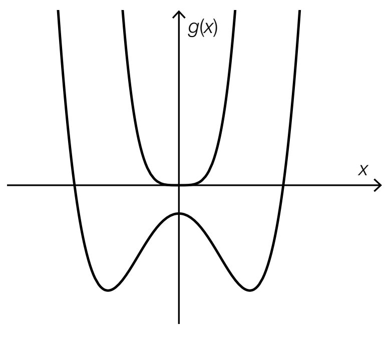
Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Anzahl der lokalen Extremstellen kann nur 1 oder 3 betragen.

$g(x) = p \cdot x^4 + q \cdot x^2 + r$
$g'(x) = 4 \cdot p \cdot x^3 + 2 \cdot q \cdot x = 0$
$x \cdot (4 \cdot p \cdot x^2 + 2 \cdot q) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{-\frac{q}{2 \cdot p}}$

Für $q \geq 0$ gibt es keine zweite Lösung und damit nur eine Extremstelle.
Für $q < 0$ gibt es zwei weitere Lösungen und damit drei Extremstellen.

mögliche Graphen:



Lösungsschlüssel:

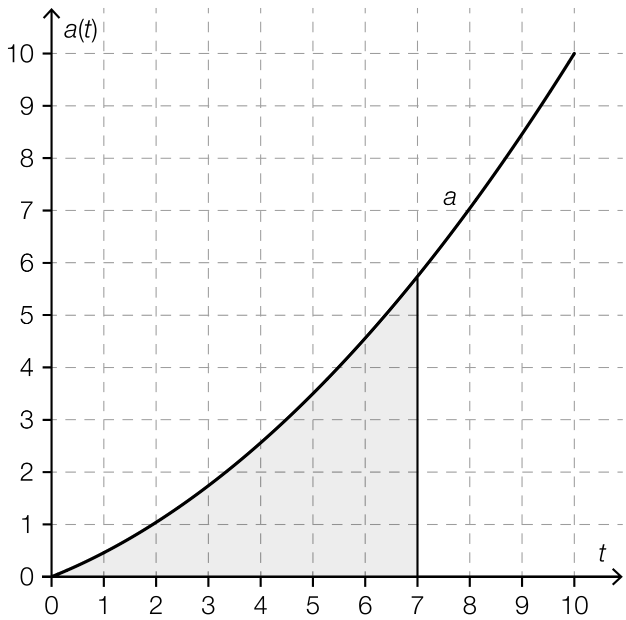
Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Anzahl möglicher Extremstellen angegeben und die Abhängigkeit von q richtig gezeigt wird. Weiters muss für beide Fälle eine richtige Skizze erstellt werden, wobei die Anzahl der Extremstellen und die Symmetrie erkennbar sein müssen.

Aufgabe 4

Beschleunigung

Ein Körper mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 5 m/s wird 10 s lang beschleunigt.
Seine Beschleunigung wird durch die Funktion a in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert.
Dabei gilt: $a(t) = 0{,}06 \cdot t^2 + 0{,}4 \cdot t$ mit t in s und $a(t)$ in m/s^2.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion a dargestellt und ein Flächenstück markiert.



Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie den Inhalt des markierten Flächenstücks und erklären Sie, was dieser Wert für die Geschwindigkeit des Körpers bedeutet.

Leitfrage:

– Berechnen Sie die Länge derjenigen Wegstrecke, die während dieses 10 s langen Beschleunigungsvorgangs zurückgelegt wird, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

Lösung zur Aufgabe 4

Beschleunigung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Inhalt des Flächenstücks:
$\int_0^7 (0{,}06 \cdot t^2 + 0{,}4 \cdot t)\,\mathrm{d}t = 16{,}66$

Dieser Wert ist der Geschwindigkeitszuwachs innerhalb der ersten 7 s.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Inhalt des Flächenstücks richtig berechnet und dieser Wert richtig interpretiert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

mögliche Vorgehensweise:
Durch Integrieren der Beschleunigungsfunktion erhält man die Geschwindigkeitsfunktion.
Durch nochmaliges Integrieren kann die Länge der zurückgelegten Wegstrecke berechnet werden.

$\int a(t)\,\mathrm{d}t = \int (0{,}06 \cdot t^2 + 0{,}4 \cdot t)\,\mathrm{d}t = 0{,}02 \cdot t^3 + 0{,}2 \cdot t^2 + c = v(t)$
$v(0) = 5 \quad \Rightarrow \quad v(t) = 0{,}02 \cdot t^3 + 0{,}2 \cdot t^2 + 5$
$s(10) = \int_0^{10} (0{,}02 \cdot t^3 + 0{,}2 \cdot t^2 + 5)\,\mathrm{d}t = 166{,}\dot{6}$

Länge der Wegstrecke: ca. 167 m

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Länge der Wegstrecke richtig berechnet und eine richtige Vorgehensweise erläutert wird.

Aufgabe 5

Fitnesstraining

Die nachstehende Datenliste gibt an, wie viele Stunden pro Woche acht Jugendliche jeweils im Fitnessstudio trainieren.

3, 3, 5, 6, 7, 8, 9, x

Der Median und das arithmetische Mittel der Trainingszeiten stimmen überein.

Aufgabenstellung:

– Geben Sie unter der Voraussetzung, dass x der größte Wert der Datenliste ist, die Trainingszeit x an.

Leitfrage:

– Ermitteln Sie unter der Voraussetzung, dass x ein beliebiger ganzzahliger Wert der Datenliste ist, einen zweiten möglichen Wert für die Trainingszeit x.

Drei der acht Jugendlichen werden nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

– Berechnen Sie für beide möglichen Werte von x die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei von den drei Jugendlichen wöchentlich mindestens fünf Stunden trainieren.

Lösung zur Aufgabe 5

Fitnesstraining

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$\frac{3 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + x}{8} = 6{,}5 \quad \Rightarrow \quad x = 11$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Trainingszeit x angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Um einen neuen Median zu erreichen, muss $x \leq 6$ gewählt werden.
Für $x = 6 \quad \Rightarrow \quad$ Median 6, dieser stimmt allerdings mit arithmetischem Mittel (5,875) nicht überein.
Daher muss $x \leq 5$ gewählt werden $\quad \Rightarrow \quad$ Median 5,5.

$$\frac{x + 3 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9}{8} = 5{,}5 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

$$\frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot 3 = \frac{15}{28}$$

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot 3 = \frac{15}{28}$$

Die Wahrscheinlichkeit für beide möglichen Werte von x beträgt jeweils ca. 53,6 %.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige zweite Wert für x und die richtige Wahrscheinlichkeit für beide möglichen Werte von x angegeben werden.