Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Mai 2019

Mathematik

Kompensationsprüfung 3
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin/der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin/vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Drohne

Eine Drohne D schwebt in einer Höhe h über einem Punkt F einer waagrechten Ebene. Eine Person steht im Punkt P dieser Ebene. Ihre Augenhöhe (vertikaler Abstand der Augen vom Punkt P) beträgt a (in Metern) und sie sieht die Drohe unter einem Höhenwinkel α.

Aufgabenstellung:

Erstellen Sie eine geeignete Skizze und geben Sie (anhand dieser Skizze) eine Formel an, mit der der Abstand $x = \overline{PF}$ dieser Person vom Punkt F in Abhängigkeit von h, a und α berechnet werden kann!

Leitfrage:

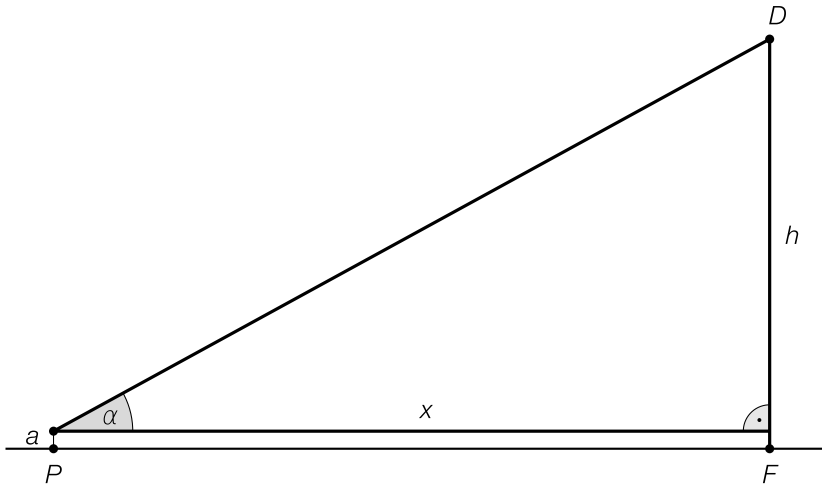
Bei einer Augenhöhe $a = 1{,}5$ m sieht diese Person die Drohne in h Metern Höhe unter dem Höhenwinkel $\alpha = 30°$.
Wenn die Drohne um 20 m senkrecht nach oben steigt, verdoppelt sich der Höhenwinkel.

Ermitteln Sie die ursprüngliche Höhe h der Drohne!

Lösung zur Aufgabe 1

Drohne

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



$\tan(\alpha) = \frac{h - a}{x}$ bzw. $x = \frac{h - a}{\tan(\alpha)}$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine geeignete Skizze und eine richtige Formel angegeben werden. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

(1) $\tan(30°) = \frac{h - 1{,}5}{x}$

(2) $\tan(60°) = \frac{h + 18{,}5}{x}$

$\Rightarrow \quad h = 11{,}5$ m

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige ursprüngliche Höhe h angegeben wird.

Aufgabe 2

Pilzkultur

Aufgrund eines ausreichenden Platz- und Nährstoffangebots vermehren sich die Zellen einer bestimmten Pilzkultur exponentiell. Nach 12 Stunden sind 1 600 Zellen und nach weiteren 3 Stunden 1 800 Zellen vorhanden.

Aufgabenstellung:

Dieser Sachverhalt kann durch eine Funktion $Z: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $Z(t) = Z_0 \cdot a^t$ und $a \in \mathbb{R}$ modelliert werden. Dabei gibt $Z(t)$ die Anzahl der nach t Stunden vorhandenen Zellen an.

Bestimmen Sie Z_0 und a und geben Sie an, nach wie vielen Stunden sich die zu Beginn vorhandene Anzahl an Zellen verdreifacht hat!

Leitfrage:

Geben Sie an, ob die absolute Zunahme in einem Zeitintervall $[0; t]$ von Z_0 und/oder a abhängig ist oder nicht, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Weisen Sie rechnerisch nach, dass die relative Zunahme in jedem Zeitintervall $[0; t]$ vom Parameter Z_0 unabhängig ist!

Lösung zur Aufgabe 2

Pilzkultur

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$Z(12) = 1\,600$ und $Z(15) = 1\,800 \quad \Rightarrow \quad Z_0 \approx 1\,000$
$a \approx 1{,}04$

$3 \cdot Z_0 = Z_0 \cdot 1{,}04^t \quad \Rightarrow \quad t \approx 28$ Stunden

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtigen Werte von Z_0 und a bestimmt werden und die richtige Zeitdauer angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die absolute Zunahme ist abhängig von Z_0 und a.

mögliche Begründung:
$Z(t) - Z(0) = Z_0 \cdot (a^t - 1) \quad \Rightarrow$ Die absolute Zunahme ist vom Grundwert und von der prozentuellen (relativen) Zunahme abhängig.

relative Zunahme:
$\frac{Z(t) - Z_0}{Z_0} = \frac{Z_0 \cdot a^t - Z_0}{Z_0} = \frac{Z_0 \cdot (a^t - 1)}{Z_0} = a^t - 1 \quad \Rightarrow \quad$ unabhängig von Z_0

Lösungsschlüssel:

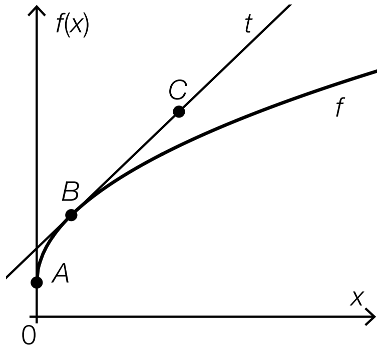
Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Einfluss auf die absolute Zunahme richtig erläutert wird und ein richtiger rechnerischer Nachweis erbracht wird.

Aufgabe 3

Wurzelfunktionen

Funktionen, deren Funktionsgleichungen die Form $f(x) = a \cdot \sqrt{x} + b$ $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ aufweisen, werden im Folgenden als Wurzelfunktionen bezeichnet.

Die nachstehende Abbildung veranschaulicht den Graphen einer Wurzelfunktion f sowie die Tangente t an den Funktionsgraphen im Punkt B. Diese Tangente verläuft durch den Punkt C. Der Punkt A liegt auf der senkrechten Achse.



Aufgabenstellung:

Geben Sie für die Funktion f an, ob a und b jeweils größer als null, kleiner als null oder gleich null sind, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

Leitfrage:

Bei einer bestimmten Skalierung der beiden Koordinatenachsen gilt: $B = (1|3)$ und $C = (4|6)$. Bestimmen Sie unter dieser Bedingung die zugehörigen Werte von a und b und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 3

Wurzelfunktionen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$a > 0$
$b > 0$

mögliche Begründungen:

Da der Funktionsgraph streng monoton steigend verläuft, muss $a > 0$ gelten.
Da $f(0) = b$ gilt und der Funktionsgraph die positive senkrechte Achse schneidet, muss $b > 0$ gelten.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn angegeben ist, dass a und b größer als null sind, und dies richtig begründet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

mögliche Vorgehensweise:

$\overrightarrow{BC} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$ Die Steigung k der Tangente t nimmt den Wert $k = 1$ an.

$f'(x) = \frac{a}{2 \cdot \sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = \frac{a}{2 \cdot \sqrt{1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 2$

$f(1) = 3 \quad \Rightarrow \quad a + b = 3 \quad \Rightarrow \quad b = 1$

Lösungsschlüssel:

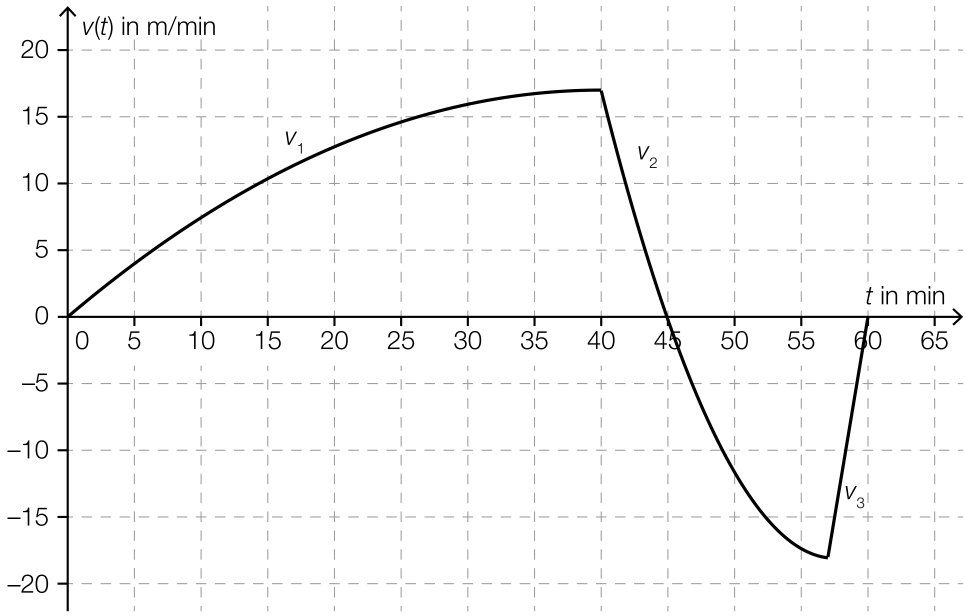
Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtigen Werte von a und b bestimmt werden und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

Aufgabe 4

Heißluftballon

Ein Heißluftballon startet zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit lässt sich mittels Gaszufuhr regulieren.

Im nachstehenden Diagramm ist die Geschwindigkeit $v(t)$ (in m/min) in Abhängigkeit von der Zeit t (in min) für eine 60-minütige Ballonfahrt dargestellt. Die Modellierung erfolgt mithilfe der Funktionen v_1, v_2 und v_3 in den Zeitintervallen [0; 40], [40; 57] und [57; 60]. Alle Schnittpunkte mit der t-Achse weisen ganzzahlige Koordinaten auf.



Aufgabenstellung:

Geben Sie an, nach welcher Zeit der Heißluftballon seine maximale Höhe erreicht hat, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Leitfrage:

Erläutern Sie, wie der Weg, den der Ballon während seines Steigvorgangs zurückgelegt hat, mithilfe des obigen Diagramms näherungsweise berechnet werden kann, und geben Sie einen Näherungswert an!

Geben Sie einen Term zur exakten Bestimmung dieses Weges (im Rahmen der vorgegebenen Modellierung) an!

Lösung zur Aufgabe 4

Heißluftballon

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Der Heißluftballon steigt, solange die Geschwindigkeit v positiv ist. Er erreicht die maximale Höhe nach 45 Minuten.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Zeit angegeben und die Entscheidung richtig begründet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Dieser Weg entspricht dem Wert des Inhalts der von den Funktionen v_1 und v_2 sowie der t-Achse im Zeitintervall [0; 45] begrenzten Fläche.

Näherungswert: 450 m

möglicher Term:
$\int_0^{40} v_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_{40}^{45} v_2(t)\,\mathrm{d}t$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Erläuterung und die Angabe eines Näherungswerts für den zurückgelegten Weg sowie die Angabe eines Terms für die exakte Berechnung dieses Weges richtig erfolgen. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [400; 500]

Aufgabe 5

Blutgruppen

Die nachstehende Tabelle gibt die gemeinsame Verteilung der Blutgruppen 0, A, B, AB und der Rhesusfaktoren Rh^+ und Rh^- für die gesamte Bevölkerung Österreichs an.

	0	A	B	AB
Rh^+	30 %	37 %	12 %	5 %
Rh^-	6 %	7 %	2 %	1 %

Im Rahmen einer Blutspendeaktion spenden 50 Personen Blut.
Es wird angenommen, dass es sich um eine zufällige Auswahl der Personen aus der österreichischen Bevölkerung handelt.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als die Hälfte dieser Personen die Blutgruppe A und den Rhesusfaktor Rh^+ hat!

Leitfrage:

Für eine Patientin mit der Blutgruppe 0 und dem Rhesusfaktor Rh^+ eignet sich nur Spenderblut der Blutgruppe 0, und zwar unabhängig vom Rhesusfaktor.
Bestimmen Sie, wie viele zufällig ausgewählte Personen Blut spenden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % mindestens eine für die Patientin geeignete Blutspende erfolgt!

Lösung zur Aufgabe 5

Blutgruppen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Modellierung mittels Binomialverteilung: $n = 50$; $p = 0{,}37$

$P(X > 25) \approx 0{,}0216$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Wahrscheinlichkeit angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) > 0{,}95$

$1 - 0{,}64^n > 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad n > 6{,}71$

Mindestens 7 Personen müssen Blut spenden.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Mindestanzahl an blutspendenden Personen angegeben wird.