Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Jänner 2019

Mathematik

Kompensationsprüfung 1
Angabe für **Prüfer/innen**

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Gegeben sind drei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b_z \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ c_y \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Komponenten b_z und c_y so, dass die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ jeweils auf $\vec{a}$ normal stehen!

Zeigen Sie, dass für die von Ihnen ermittelten Komponenten auch $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufeinander normal stehen, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Geben Sie jeweils eine Parameterdarstellung für die Geraden g, h und i so an, dass die nachstehend angeführten Bedingungen erfüllt sind!

I: Die Gerade g hat den Vektor $\vec{a}$ als Richtungsvektor und verläuft durch den Ursprung.

II: Die Gerade h hat den Vektor $\vec{b}$ als Richtungsvektor und schneidet die Gerade g in genau einem Punkt.

III: Die Gerade i ist parallel zur Geraden h und windschief zur Geraden g (sie hat also mit g keinen Schnittpunkt).

Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise und weisen Sie nach, dass i zu g windschief ist!

Lösung zur Aufgabe 1

Drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren stehen genau dann aufeinander normal, wenn ihr Skalarprodukt null ergibt.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \;\Rightarrow\; 2 - 2 + 3 \cdot b_z = 0 \;\Rightarrow\; b_z = 0$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \;\Rightarrow\; -3 - 2 \cdot c_y + 15 = 0 \;\Rightarrow\; c_y = 6$

Dann gilt auch $\vec{b} \cdot \vec{c} = -6 + 6 + 0 = 0$.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl beide Komponenten korrekt bestimmt werden als auch gezeigt wird, dass $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufeinander normal stehen, und wenn eine (sinngemäß) korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Lösung:

$g: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad h: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad i: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zu zeigen ist, dass g und i keinen Schnittpunkt haben:

$s = 2 \cdot u$
$-2 \cdot s = u$
$3 \cdot s = 7$

Dieses Gleichungssystem in den beiden Variablen s und u hat keine Lösung.

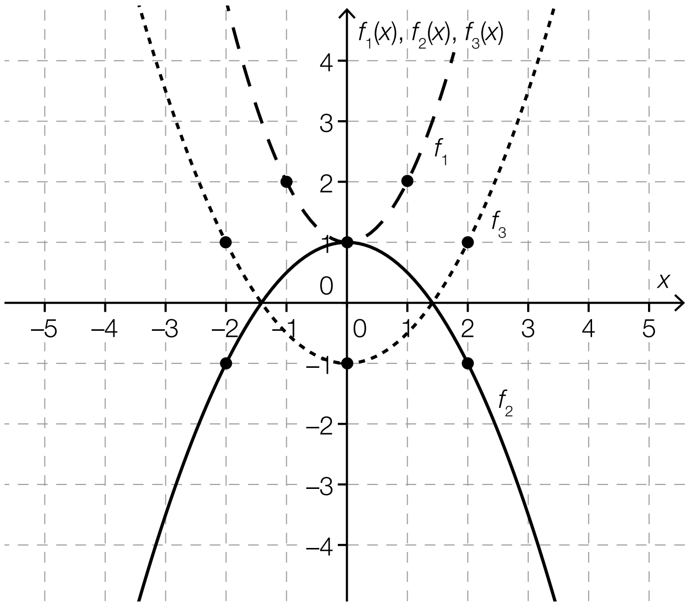
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn drei den Vorgaben entsprechende Parameterdarstellungen angegeben werden, eine (sinngemäß) korrekte Vorgehensweise erläutert wird und korrekt nachgewiesen wird, dass die Geraden g und i zueinander windschief sind.

Aufgabe 2

Funktionen

Im nachstehenden Koordinatensystem sind drei Graphen von Funktionen mit $x \mapsto a \cdot x^2 + b$ abgebildet. Die markierten Punkte haben ganzzahlige Koordinaten.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung der Funktion f_2!

Leitfrage:

Erläutern Sie allgemein den Einfluss der Parameter a und b auf den Verlauf des Graphen einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b$ und $a \neq 0$!

Konkretisieren Sie Ihre Erläuterung durch den Vergleich der Parameter der drei Funktionen f_1, f_2 und f_3!

Lösung zur Aufgabe 2

Funktionen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mit $f_2(x) = a \cdot x^2 + b$ sowie $f_2(0) = 1$ und z. B. $f_2(2) = -1$ ergibt sich $f_2(x) = -0{,}5 \cdot x^2 + 1$.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Funktionsgleichung von f_2 angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Erläuterung:

Der Parameter b bestimmt den Schnittpunkt mit der senkrechten Achse.
Der Parameter a bestimmt die Krümmung der Parabel.
$a > 0$: Die Parabel ist linksgekrümmt (positiv gekrümmt); je größer a ist, umso „steiler" verläuft der Graph von f.
$a < 0$: Die Parabel ist rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt); je kleiner a ist, umso „steiler" verläuft der Graph von f.

Bei f_1 und f_2 stimmt der Parameter b überein und hat den Wert $b = 1$.
Der Parameter a ist bei f_1 positiv und bei f_2 negativ.

Bei f_3 ist $b = -1$, a ist positiv (und hat denselben Betrag wie bei f_2).

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Einfluss der Parameter a und b allgemein (sinngemäß) korrekt erläutert wird und die Unterschiede in den Parametern der Funktionen f_1, f_2 und f_3 korrekt beschrieben werden.

Aufgabe 3

Wildschweine

Laut einem Zeitungsartikel nahm die Wildschweinpopulation im Jahr 2013 in Bayern stark zu, obwohl noch nie zuvor so viele Wildschweine geschossen wurden. In der Jagdsaison 2012/13 wurden 66 000 Wildschweine geschossen, in der Jagdsaison 2011/12 waren es nur 42 300 Wildschweine.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die absolute und die relative Zunahme an Wildschweinabschüssen in Bayern von der Jagdsaison 2011/12 auf die Jagdsaison 2012/13 an!

Leitfrage:

Geben Sie an, welcher funktionale Zusammenhang zwischen Zeit und Anzahl an Wildschweinabschüssen besteht, wenn man von einer gleichbleibenden jährlichen Zuwachsrate an Abschüssen ausgeht, die der ermittelten relativen Änderung der Abschusszahlen in Bayern entspricht!

Geben Sie eine derartige Gleichung für eine Funktion W an, die die Anzahl an Wildschweinabschüssen in Bayern in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Jahren) beschreibt, wobei $W(0)$ die Anzahl der Abschüsse in der Saison 2012/13 angibt!

Ermitteln Sie mithilfe dieser Gleichung die Anzahl an Wildschweinabschüssen für die Saison 2022/23 und schätzen Sie ein, ob es realistisch ist, dass sich die Anzahl an Wildschweinabschüssen über einen sehr großen Zeitraum gemäß dieser Funktion entwickelt!

Lösung zur Aufgabe 3

Wildschweine

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

absolute Zunahme: 23 700 Abschüsse

relative Zunahme: $\frac{66\,000 - 42\,300}{42\,300} \approx 0{,}56$

Die Anzahl der Abschüsse hat um ca. 56 % zugenommen.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Zunahmen korrekt angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Es handelt sich um eine Exponentialfunktion.

$W(t) = 66\,000 \cdot 1{,}56^t$
$W(10) \approx 5{,}6$ Millionen

Es ist nicht realistisch, da diese Exponentialfunktion streng monoton steigend ist, die Anzahl an Wildschweinabschüssen aber nicht unendlich groß werden kann.

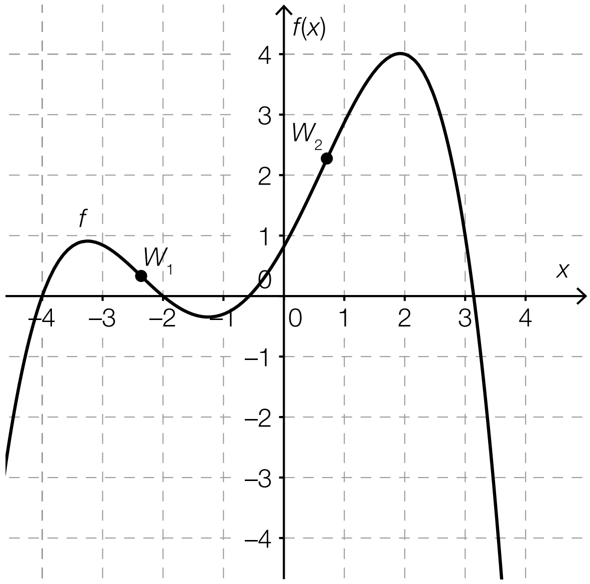
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Funktionsgleichung angegeben, der Wert für die Saison 2022/23 korrekt ermittelt und eine korrekte Einschätzung angegeben wird.

Aufgabe 4

Ableitungs- und Stammfunktionen

Die nachstehende Abbildung zeigt den Ausschnitt eines Graphen einer Polynomfunktion f vierten Grades mit den Wendepunkten W_1 und W_2.



Aufgabenstellung:

Geben Sie zu jeder der nachstehenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

Aussage 1: Für alle $x \in [-1; 1]$ gilt: $f'(x) > 0$.

Aussage 2: Es gibt ein $x \in [0; 1]$ mit $f'(x) = 0$.

Aussage 3: Für alle $x \in [-4; -2]$ gilt: $f''(x) < 0$.

Aussage 4: Es gibt ein $x \in [1; 3]$ mit $f''(x) = 0$.

Leitfrage:

Geben Sie an, in welchen Teilintervallen von $[-4; 3]$ eine Stammfunktion von f streng monoton steigend ist, und erläutern Sie Ihre Antwort!

Lösung zur Aufgabe 4

Ableitungs- und Stammfunktionen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Aussage 1: Die Aussage ist wahr, da *f* in diesem Intervall streng monoton steigend ist.
Aussage 2: Die Aussage ist falsch, da *f* in diesem Intervall kein lokales Extremum (und keinen Sattelpunkt) hat.
Aussage 3: Die Aussage ist falsch, da *f* in diesem Intervall ihr Krümmungsverhalten ändert.
Aussage 4: Die Aussage ist falsch, da *f* in diesem Intervall keine Wendestelle hat.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn für jede Aussage korrekt angegeben wird, ob sie wahr oder falsch ist, und die Entscheidungen (sinngemäß) korrekt begründet werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Eine Stammfunktion von *f* ist in $[-4; -2]$ und in $[-0{,}5; 3]$ streng monoton steigend, da in diesen Intervallen die Funktion *f* nicht negative Funktionswerte hat.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Monotonieintervalle einer Stammfunktion von *f* richtig angegeben werden. Andere Schreibweisen der Intervalle (offen oder halboffen) sowie korrekte formale oder verbale Beschreibungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
Bei den Intervallgrenzen sind Abweichungen von $\pm 0{,}2$ zu tolerieren.

Aufgabe 5

Medikament

Laut Angaben eines Pharmaunternehmens treten bei einem bestimmten Medikament bei 2 % der Personen, die dieses Medikament einnehmen, leichte Nebenwirkungen auf.

Das Medikament wird von 50 Personen eingenommen.

Im Folgenden soll vereinfacht angenommen werden, dass die Anzahl der Personen, bei denen leichte Nebenwirkungen auftreten, binomialverteilt ist.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie, bei wie vielen Personen leichte Nebenwirkungen zu erwarten sind!

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei mehr als zwei Personen leichte Nebenwirkungen auftreten!

Leitfrage:

Ermitteln Sie die Mindestanzahl n ($n \in \mathbb{N}$) derjenigen Personen, die das Medikament einnehmen müssen, damit leichte Nebenwirkungen bei mindestens einer Person mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % auftreten! Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 5

Medikament

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Erwartungswert $E = n \cdot p = 1$

$P(X > 2) \approx 0{,}078 = 7{,}8\ \%$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Erwartungswert und die Wahrscheinlichkeit korrekt angegeben werden.
Toleranzintervall: [0,07; 0,08] bzw. [7 %; 8 %]

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Vorgehensweise:

$P(X \geq 1) \geq 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad 1 - P(X = 0) \geq 0{,}9$

$1 - 0{,}98^n \geq 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad 0{,}98^n \leq 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad n \geq 113{,}97\ldots$

$n = 114$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Mindestanzahl der Personen richtig angegeben wird und die Vorgehensweise korrekt erläutert wird.