

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Oktober 2018

Mathematik

Kompensationsprüfung 1
Angabe für **Prüfer/innen**

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin/der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin/vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Preis

Der Nettopreis einer Ware beträgt N Euro. Der Bruttopreis ist die Summe von Nettopreis und m % Mehrwertsteuer (berechnet vom Nettopreis).

Der Verkaufspreis V ergibt sich, indem man vom Bruttopreis einen Rabatt in der Höhe von r % des Bruttopreises abzieht.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Formel für den Verkaufspreis V in Abhängigkeit von N , m und r auf!

$V =$ _____

Leitfrage:

Geben Sie an, ob man vom Nettopreis zuerst r % des Nettopreises abziehen kann und von diesem anschließend m % dieses Zwischenergebnisses hinzufügen kann, um zum selben Verkaufspreis V zu gelangen! Begründen Sie Ihre Entscheidung!

Geben Sie weiters an, wie viel Prozent Rabatt bei 20 % Mehrwertsteuer gewährt werden müssen, sodass der Nettopreis und der Verkaufspreis gleich sind!

Lösung zur Aufgabe 1

Preis

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Formel:

$$V = N \cdot \left(1 + \frac{m}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein korrekter Term angegeben wird. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Begründung:

Man erhält denselben Verkaufspreis V , wenn man zuerst den Rabatt abzieht und dann die Mehrwertsteuer addiert, denn aufgrund des Kommutativgesetzes der Multiplikation gilt:

$$N \cdot \left(1 + \frac{m}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right) = N \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{m}{100}\right)$$

$$V = V \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right) \Rightarrow r = 16,6$$

Es müssen ca. 17 % Rabatt gewährt werden.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die alternative Berechnung von V als richtig angegeben und korrekt begründet wird. Weiters muss der gesuchte Prozentsatz richtig angegeben werden.

Toleranzintervall: [16 %; 17 %]

Aufgabe 2

Jod-131

Das Isotop Jod-131 ist radioaktiv.

Die nach t Tagen noch vorhandene Menge $N(t)$ von Jod-131 nimmt näherungsweise exponentiell ab. Dabei bezeichnet N_0 die Menge an Jod-131 zum Zeitpunkt $t = 0$.

Aufgabenstellung:

Nach vier Tagen sind 30 % der Ausgangsmenge von Jod-131 zerfallen.

Berechnen Sie, welcher Prozentsatz des vorhandenen Jod-131 pro Tag zerfällt, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Ermitteln Sie allgemein (ohne Verwendung konkreter Zahlenwerte) die relative Änderung einer Exponentialfunktion der Form $N(t) = N_0 \cdot a^t$ in den Zeitintervallen $[0; t_1]$ und $[t_0; t_0 + t_1]$ (mit $t_0, t_1 \in \mathbb{R}^+$)!

Interpretieren Sie die Ergebnisse (im Hinblick auf eine charakteristische Eigenschaft von Exponentialfunktionen)!

Lösung zur Aufgabe 2

Jod-131

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Nach vier Tagen sind noch 70 % der Ausgangsmenge vorhanden.

$$N(4) = 0,7 \cdot N_0 = N_0 \cdot a^4 \Rightarrow a \approx 0,915$$

Somit sind ca. 91,5 % der Ausgangsmenge des beschriebenen Isotops Jod-131 nach einem Tag noch vorhanden. Pro Tag zerfallen daher ca. 8,5 % der vorhandenen Jod-131-Menge.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein korrekter Prozentsatz berechnet und eine korrekte Vorgehensweise erklärt wird.

Toleranzintervall: [8 %; 9 %]

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$\frac{N(t_1) - N(0)}{N(0)} = \frac{N_0 \cdot a^{t_1} - N_0}{N_0} = a^{t_1} - 1$$

$$\frac{N(t_0 + t_1) - N(t_0)}{N(t_0)} = \frac{N_0 \cdot a^{t_0+t_1} - N_0 \cdot a^{t_0}}{N_0 \cdot a^{t_0}} = a^{t_1} - 1$$

Mögliche Interpretation:

Die relative Änderung der Funktionswerte ist in gleich langen Zeitintervallen konstant.

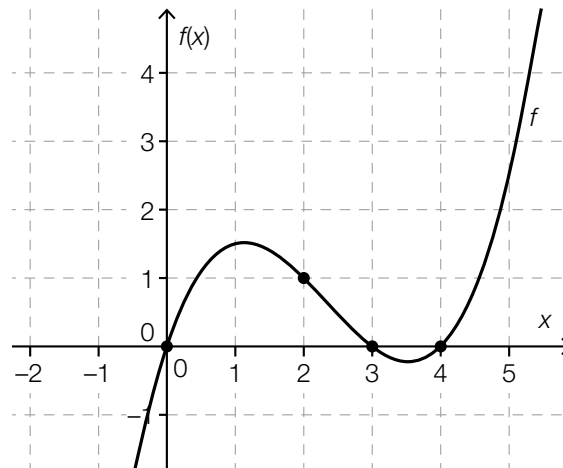
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die relative Änderung für beide Intervalle korrekt ermittelt und eine korrekte Interpretation angegeben wird.

Aufgabe 3

Funktion und Stammfunktion

Die nachstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen einer Polynomfunktion f dritten Grades. Die Koordinaten der eingezeichneten Punkte sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Geben Sie die Anzahl und die Lage der Extremstelle(n) und Wendestelle(n) einer Stammfunktion F von f an!

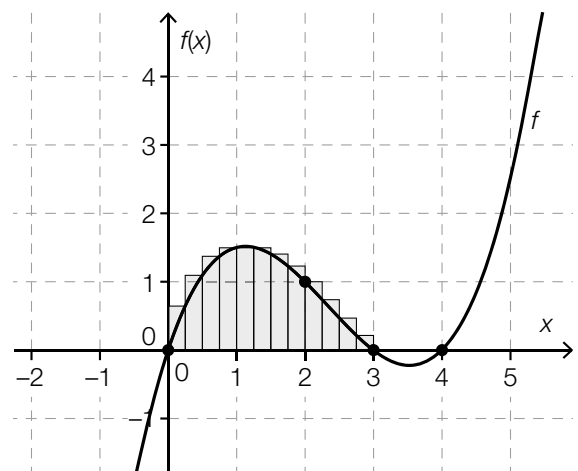
Leitfrage:

Der Graph der Funktion f schließt mit der x -Achse zwei endliche Flächenstücke ein.

Stellen Sie einerseits unter Verwendung von f und andererseits unter Verwendung von F jeweils eine Formel zur Berechnung des (gesamten) Flächeninhalts dieser beiden Flächenstücke auf!

In der nebenstehenden Abbildung wird das größere Flächenstück durch 12 gleich breite Rechtecke angenähert. Die Summe dieser Rechtecksflächen (Obersumme) kann als Näherungswert für den Flächeninhalt des größeren Flächenstücks herangezogen werden.

Geben Sie den Wert der dargestellten Obersumme an und berechnen Sie unter Verwendung einer geeigneten Modellfunktion f , um wie viel dieser Wert vom tatsächlichen Wert des Flächeninhalts dieses Flächenstücks abweicht!



Lösung zur Aufgabe 3

Funktion und Stammfunktion

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Stammfunktion F hat drei Extremstellen. Diese liegen an den Stellen $x = 0$, $x = 3$ und $x = 4$.
Die Stammfunktion F hat zwei Wendestellen. Diese liegen an den Stellen $x \approx 1,1$ und $x \approx 3,5$.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Anzahl und die Lage der Extrem- und Wendestellen von F korrekt angegeben werden.

Toleranzintervalle für die Wendestellen: $[1; 1,3]$ bzw. $[3,4; 3,7]$

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Formeln:

$$A = \int_0^3 f(x) dx - \int_3^4 f(x) dx$$

$$A = [F(3) - F(0)] - [F(4) - F(3)]$$

$$O_s \approx 3,17$$

$$f(x) = 0,25 \cdot x^3 - 1,75 \cdot x^2 + 3 \cdot x$$

$$A \approx 2,81$$

$$O_s - A \approx 0,36$$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl unter Verwendung von f als auch unter Verwendung von F eine korrekte Formel zur Berechnung des Flächeninhalts aufgestellt wird und ein korrekter Wert der Obersumme sowie die Abweichung vom tatsächlichen Wert korrekt angegeben werden.

Toleranzintervall für die Abweichung: $[0,3; 0,4]$

Aufgabe 4

Lotrechter Wurf

Die Flughöhe eines Körpers, der zum Zeitpunkt $t = 0$ nach oben geschossen wird, lässt sich mithilfe einer Funktion h beschreiben. Es gilt: $h(t) = 50 + 60 \cdot t - 5 \cdot t^2$ ($h(t)$ in Metern, t in Sekunden).

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Gleichung der ersten Ableitungsfunktion von h und geben Sie die Bedeutung dieser Funktion für die Bewegung des Körpers unter Verwendung der richtigen Maßeinheit an!

Ermitteln Sie den Extrempunkt $E = (t_1 | h(t_1))$ der Funktion h und deuten Sie die beiden Koordinaten t_1 und $h(t_1)$ im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Funktion h im Zeitintervall $[0; t_1]$ und deuten Sie das Ergebnis im Hinblick auf die Bewegung des Körpers!

Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung besagt, dass unter bestimmten Voraussetzungen in einem Intervall $[a; b]$ für eine Funktion f mindestens eine Stelle $x_0 \in (a; b)$ existiert, sodass $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ gilt.

Interpretieren Sie diese Aussage für die Funktion h im gegebenen Kontext für das Zeitintervall $[0; t_1]$!

Bestimmen Sie für die Funktion h die im Mittelwertsatz beschriebene Stelle t_0 für das Zeitintervall $[0; t_1]$!

Lösung zur Aufgabe 4

Lotrechter Wurf

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$h'(t) = 60 - 10 \cdot t$$

Bedeutung: $h'(t)$ gibt die momentane Geschwindigkeit des Körpers (zum Zeitpunkt t) in m/s an.

$$h'(t) = 0 \Rightarrow t_1 = 6; h(6) = 230 \Rightarrow E = (6 | 230)$$

Deutung: Der Körper befindet sich nach 6 Sekunden in der (maximalen) Höhe von 230 Metern.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Ableitungsfunktion und ihre Bedeutung (unter Verwendung der richtigen Maßeinheit) korrekt angegeben werden, der Extrempunkt richtig ermittelt wird und beide Koordinaten korrekt gedeutet werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$\frac{h(6) - h(0)}{6 - 0} = \frac{230 - 50}{6} = 30$$

Deutung: Die mittlere Geschwindigkeit des Körpers im Zeitintervall $[0 \text{ s}; 6 \text{ s}]$ beträgt 30 m/s.

Mögliche Interpretation:

Im Zeitintervall $[0; 6]$ gibt es mindestens einen Zeitpunkt, für den die Momentangeschwindigkeit des Körpers gleich der mittleren Geschwindigkeit für das Zeitintervall $[0; 6]$ ist.

Bestimmung von t_0 :

$$h'(t_0) = 30 \Rightarrow 60 - 10 \cdot t_0 = 30 \Rightarrow t_0 = 3 \text{ s}$$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die mittlere Änderungsrate richtig berechnet und gedeutet wird, eine korrekte Interpretation des Mittelwertsatzes im Kontext erfolgt sowie die Stelle t_0 korrekt bestimmt wird.

Aufgabe 5

Statistische Kennzahlen

Gegeben ist eine geordnete Datenliste mit den Werten a_1, a_2, \dots, a_n ($n \in \mathbb{N}, n > 3$).

Aufgabenstellung:

Geben Sie für jede der nachstehenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

Aussage 1: Der Median ist auf jeden Fall ein Wert, der in der geordneten Datenliste aufscheint.

Aussage 2: Für den Median m der Datenliste gilt auf jeden Fall: $m = \frac{a_1 + a_n}{2}$.

Aussage 3: Für das arithmetische Mittel \bar{x} der Datenliste gilt auf jeden Fall: $n \cdot \bar{x} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Leitfrage:

Geben Sie eine geordnete Datenliste mit 11 Werten an, die nachstehende Bedingungen erfüllt: Das arithmetische Mittel, der Median und die Spannweite haben den Wert 10. Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Erklären Sie, wie Sie in der von Ihnen angegebenen Datenliste zwei Werte so ergänzen können, dass sich weder der Median noch das arithmetische Mittel ändert, die Spannweite sich allerdings um 6 erhöht!

Lösung zur Aufgabe 5

Statistische Kennzahlen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Aussagen 1 und 2 sind falsch, wie sich anhand eines Gegenbeispiels zeigen lässt:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = 3 \quad a_4 = 6$$

$m = 2,5$ und gehört somit nicht der Datenliste an.

$$\frac{a_1 + a_4}{2} = 3,5 \text{ und ist somit nicht der Median.}$$

Aussage 3 ist wahr, da laut Definition für das arithmetische Mittel gilt: $\bar{x} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der drei Aussagen die Entscheidung über ihre Richtigkeit korrekt getroffen und (sinngemäß) korrekt begründet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Datenlisten:

5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

5, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 15

5, 6, 7, 8, 10, 10, 10, 12, 13, 14, 15

4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 14, 14

Mögliche Vorgehensweise:

Der mittlere (sechste) Wert der geordneten Datenliste muss 10 sein.

Die Differenz von größtem und kleinstem Wert der Datenliste muss 10 ergeben.

Die Summe der 11 Werte muss 110 ergeben.

Ein Wert, der um 3 kleiner als der kleinste Wert ist, und ein zweiter Wert, der um 3 größer als der größte Wert ist, sind zu ergänzen.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte geordnete Datenliste mit 11 Werten angegeben, eine korrekte Vorgehensweise erläutert und die Ergänzung der beiden Werte korrekt erklärt wird.