Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Juni 2018

Mathematik

Kompensationsprüfung 5
Angabe für **Prüfer/innen**

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin/der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin/vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Kosten und Erlös

Die Produktionskosten (in Euro) eines Betriebes für die Herstellung eines Produkts werden durch eine Funktion K mit der Gleichung $K(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 45\,000$ (x in Tonnen, $K(x)$ in Euro) modelliert.

Bei der Herstellung von 40 Tonnen fallen Kosten von 47 600 Euro an, bei der Herstellung von 100 Tonnen sind es 58 250 Euro.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Werte der Parameter a und b!

Leitfrage:

Eine Gewinnschwelle (Break-even-Point) liegt bei 80 hergestellten und verkauften Tonnen des Produkts.

Geben Sie den Wert des Parameters k der entsprechenden linearen Erlösfunktion E mit der Gleichung $E(x) = k \cdot x$ an und deuten Sie diesen im vorliegenden Kontext!

Lösung zur Aufgabe 1

Kosten und Erlös

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$a = 1{,}125$
$b = 20$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden richtigen Parameterwerte angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$K(x) = 1{,}125 \cdot x^2 + 20 \cdot x + 45\,000$

$K(80) = E(80) = 80 \cdot k$

$k = \frac{53\,800}{80} = 672{,}5$
Der Verkaufspreis pro Tonne beträgt 672,50 Euro.

Lösungsschlüssel:

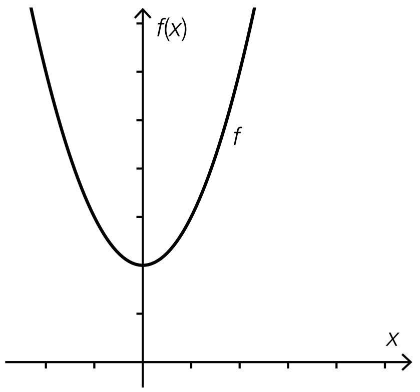
Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Wert für *k* angegeben und dieser (sinngemäß) korrekt gedeutet wird.

Aufgabe 2

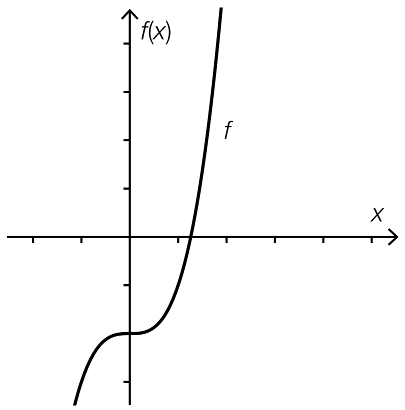
Funktionen

Gegeben sind drei Graphen von Funktionen der Form $f(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $z \in \{1, 2, 3\}$.

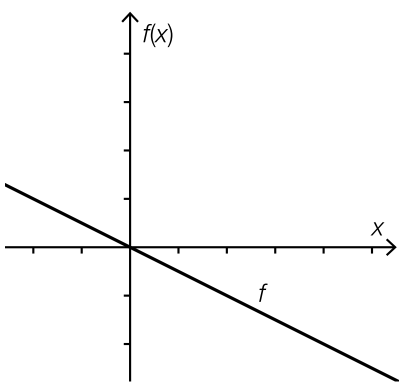
Graph 1:



Graph 2:



Graph 3:



Aufgabenstellung:

Geben Sie für jede Funktion anhand des Graphen an, welchen Wert z hat und ob die Parameter a und b jeweils größer als null, kleiner als null oder gleich null sind!

Leitfrage:

Geben Sie für die Funktion, deren Darstellung der Graph 2 ist, eine Gleichung zur Berechnung der Nullstelle(n) in Abhängigkeit von den Parametern a und b an!

Geben Sie an, wie viele Nullstellen ein Graph dieses Funktionstyps hat, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Ermitteln Sie die Parameter a und b einer Funktion dieses Funktionstyps, deren Graph im Punkt $A = (1\,|\,-1)$ die Steigung 3 hat!

Lösung zur Aufgabe 2

Funktionen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Graph 1:
$z = 2$, $a > 0$, $b > 0$

Graph 2:
$z = 3$, $a > 0$, $b < 0$

Graph 3:
$z = 1$, $a < 0$, $b = 0$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn jeweils ein richtiger Wert für z und korrekte Bedingungen für die Parameter a und b angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$f(x) = a \cdot x^3 + b$ mit $a > 0$ und $b < 0$
$a \cdot x^3 + b = 0$
$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{a}}$

Ein Graph dieses Funktionstyps hat immer genau eine Nullstelle, da die Gleichung $a \cdot x^3 + b = 0$ für $a > 0$ und $b < 0$ immer genau eine reelle Lösung hat.

$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2$
$f(1) = -1 \quad \Rightarrow \quad a + b = -1$
$f'(1) = 3 \quad \Rightarrow \quad a = 1 \quad \Rightarrow \quad b = -2$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl eine korrekte Gleichung zur Berechnung der Nullstelle und eine korrekte Begründung als auch die richtigen Werte für die Parameter a und b angegeben werden.

Aufgabe 3

Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm

Die Funktion v beschreibt die Geschwindigkeit eines fahrenden Autos auf einem geradlinigen Straßenabschnitt in den ersten 16 Sekunden nach dem Start.
In Abbildung 1 ist der Graph von v dargestellt. In Abbildung 2 ist der Graph derjenigen Funktion v_m dargestellt, die diese Geschwindigkeit in vier getrennten Abschnitten linear modelliert.

Abbildung 1

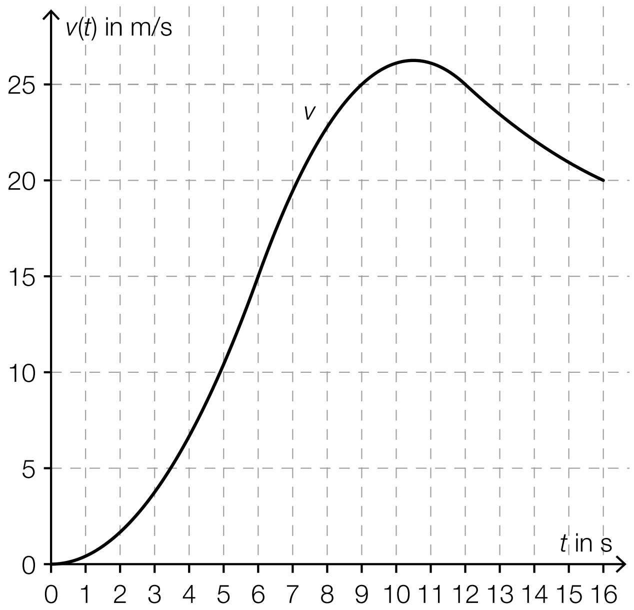
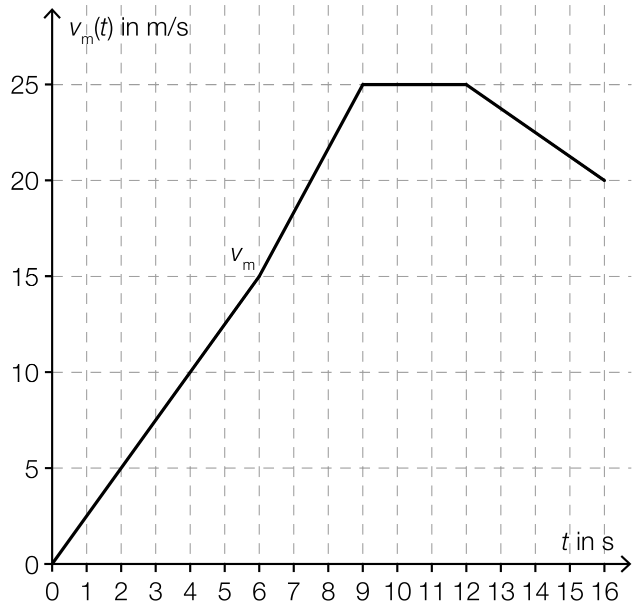


Abbildung 2



Aufgabenstellung:

Geben Sie mithilfe der Funktion v einen Ausdruck zur Berechnung desjenigen Weges s an, den das Auto in den ersten 16 Sekunden nach dem Start zurückgelegt hat!

Bestimmen Sie näherungsweise mithilfe des Graphen von v, wie groß die mittlere Beschleunigung des Autos im Zeitintervall [6; 9] ist!

Leitfrage:

Die Lösungen der Gleichung $v(t) = v_m(t)$ mit $t \in [0; 16]$ werden der Größe nach geordnet und in der Folge als „Stützstellen“ bezeichnet.

Ermitteln Sie den zwischen der 4. und 5. Stützstelle zurückgelegten Weg mithilfe von v_m!
Geben Sie an, ob der tatsächlich zurückgelegte Weg über- oder unterschritten wird, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Lösung zur Aufgabe 3

Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$s = \int_0^{16} v(t)\,\mathrm{d}t$

$\frac{v(9) - v(6)}{3} = \frac{10}{3} \approx 3{,}3\ \mathrm{m/s^2}$

Die mittlere Beschleunigung des Autos beträgt ca. $3{,}3\ \mathrm{m/s^2}$.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn das bestimmte Integral und der richtige Wert für die Beschleunigung angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Lösungen der Gleichung $v(t) = v_m(t)$: 0, 6, 9, 12, 16

zurückgelegter Weg im Intervall [12; 16]: 90 m

Der tatsächlich zurückgelegte Weg wird überschritten.

Mögliche Begründung:
Der Graph der Funktion v_m verläuft im Intervall [12; 16] zur Gänze oberhalb des Graphen von v.
Somit gilt: $\int_{12}^{16} v_m(t)\,\mathrm{d}t > \int_{12}^{16} v(t)\,\mathrm{d}t$.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Wert des zurückgelegten Weges ermittelt wird und die Überschreitung des tatsächlich zurückgelegten Weges erkannt und korrekt begründet wird.

Aufgabe 4

Sekantensteigung

Gegeben ist eine Polynomfunktion f mit $f(x) = -\frac{1}{12} \cdot x^3 + 3 \cdot x^2$.
In der nachstehenden Tabelle sind die (auf zwei Nachkommastellen gerundeten) Sekantensteigungen für einzelne Intervalle angegeben.

Intervall	Sekantensteigung
[0; 3]	8,25
[3; 7,5]	24,19
[7,5; 9]	32,44
[9; 15]	s_4

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den fehlenden Wert s_4!

Leitfrage:

Berechnen Sie das arithmetische Mittel m der vier Werte aus der obigen Tabelle!

Vergleichen Sie den Wert von m mit der Sekantensteigung im Intervall [0; 15] und begründen Sie, warum die Ergebnisse verschieden sind!

Lösung zur Aufgabe 4

Sekantensteigung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$s_4 = \frac{f(15) - f(9)}{6} = 35{,}25$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn s_4 richtig angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$m = \frac{8{,}25 + 24{,}19 + 32{,}44 + 35{,}25}{4} \approx 25{,}03$$

$$\frac{f(15) - f(0)}{15} = 26{,}25$$

Der Wert von m und der Wert der Sekantensteigung im Intervall [0; 15] stimmen nicht überein.

Mögliche Begründung:
Die in der Tabelle angegebenen Sekantensteigungen wurden für unterschiedliche Intervalllängen berechnet.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden richtigen Werte angegeben werden und eine korrekte Begründung angegeben wird.

Aufgabe 5

Hausübung

Eine Mathematik-Hausübung bestand aus x Aufgaben (mit $x \in \mathbb{N}$ und $x \leq 15$). Die Mathematiklehrerin wählt aus den 15 Schülern ihrer Klasse x Schüler aus, wobei jeder Schüler jeweils eine andere Aufgabe der Hausübung erklären soll. Wenn es auf die Reihenfolge der Auswahl nicht ankommt, ist die Anzahl der Möglichkeiten, diese Auswahl zu treffen, 6435.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung an, mit der eine mögliche Anzahl x der Hausübungsaufgaben berechnet werden kann!

Leitfrage:

Bei der Hausübung ist Leo bei der Berechnung von Binomialkoeffizienten Folgendes aufgefallen:

$$\begin{aligned}
\binom{9}{1} &= 9 \\
&\quad \downarrow \ \cdot 8 \ \ : 2 \\
\binom{9}{2} &= 36 \\
&\quad \downarrow \ \cdot 7 \ \ : 3 \\
\binom{9}{3} &= 84 \\
&\quad \downarrow \ \cdot 6 \ \ : 4 \\
\binom{9}{4} &= 126 \text{ usw.}
\end{aligned}$$

Leo beschreibt den Zusammenhang allgemein für $\binom{n}{k}$ mit $k, n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k < n$ folgendermaßen:

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot c$$

Geben Sie den Faktor c in Abhängigkeit von k und n an!

Lösung zur Aufgabe 5

Hausübung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$\binom{15}{x} = 6\,435$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Gleichung angegeben wird. Äquivalente Gleichungen (wie z. B. $x = 7$ oder $x = 8$) sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$c = \frac{n-k}{k+1}$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Faktor c richtig angegeben wird.