

Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Juni 2018

Mathematik

Kompensationsprüfung 2
Angabe für **Prüfer/innen**

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin/der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin/vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Vierecke

Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ mit den Eckpunkten $A = (0|0|0)$, $B = (6|-2|3)$, C und $D = (3|6|z_D)$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die fehlende Koordinate des Eckpunkts D und die Koordinaten des Eckpunkts C !

Leitfrage:

Gegeben ist ein weiteres Viereck $PQRS$ mit den Eckpunkten $P = (0|0|0)$, $Q = (7|y_Q|-4)$, $R = (8|15|0)$ und $S = (x_S|8|4)$.

Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten der Punkte Q und S so, dass dieses Viereck ein Parallelogramm ist!

Überprüfen Sie, ob das Parallelogramm auch ein Rechteck, eine Raute oder ein Quadrat ist, und erläutern Sie jeweils Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 1

Vierecke

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AD} &= 0 \Rightarrow z_D = -2 \\ C = B + \vec{AD} &\Rightarrow C = (9|4|1)\end{aligned}$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Koordinate z_D und die Koordinaten des Eckpunkts C korrekt angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Vorgehensweise:

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 7 \\ y_Q \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{SR} = \begin{pmatrix} 8 - x_S \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} = \vec{SR} \Rightarrow y_Q = 7, x_S = 1$$

$$\vec{PQ} \cdot \vec{PS} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Das Viereck ist kein Rechteck bzw. kein Quadrat, da die Seiten } PQ \text{ und } PS \text{ keinen rechten Winkel einschließen.}$$

$$\sqrt{7^2 + 7^2 + (-4)^2} \neq \sqrt{1^2 + 8^2 + 4^2} \Rightarrow \text{Das Viereck ist keine Raute, da die Seiten } PQ \text{ und } PS \text{ nicht gleich lang sind.}$$

Lösungsschlüssel:

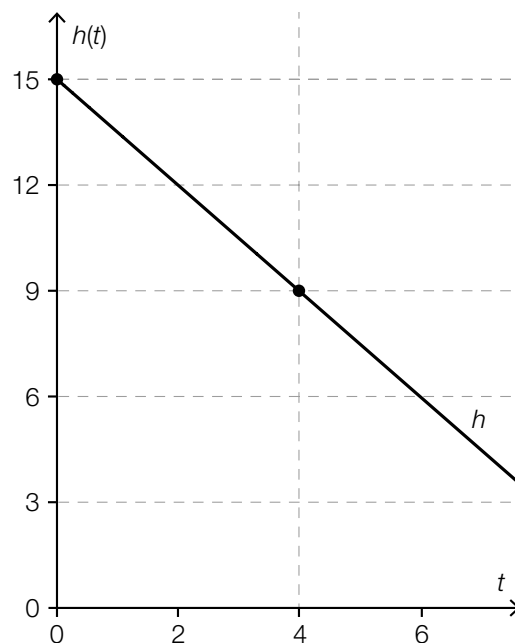
Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden Koordinaten und der Typ des Vierecks korrekt angegeben werden und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

Aufgabe 2

Umfüllen von Wasser

Ein quaderförmiger Behälter mit quadratischer Grundfläche steht auf einer waagrechten Ebene. Die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche beträgt a cm. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Behälter mit $6\,000\text{ cm}^3$ Wasser gefüllt, anschließend ($t > 0$) wird ihm mit konstanter Abflussrate Wasser entnommen. Die Funktion h beschreibt die Höhe (in cm) des Wasserpegels im Behälter in Abhängigkeit von der Zeit t (in min).

Nachstehend ist der Graph von h abgebildet. Die zwei auf dem Graphen gekennzeichneten Punkte haben ganzzahlige Koordinaten.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Seitenlänge a der quadratischen Grundfläche des Behälters und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Das dem ersten Behälter entnommene Wasser wird ohne Zeitverzögerung einem zweiten, zum Zeitpunkt $t = 0$ leeren Behälter zugeführt. Der zweite Behälter steht ebenfalls auf einer waagrechten Ebene und ist quaderförmig mit quadratischer Grundfläche. Die Seitenlänge seiner quadratischen Grundfläche ist allerdings nur halb so groß wie jene des ersten Behälters.

Die Funktion h_1 beschreibt die Höhe (in cm) des Wasserpegels im zweiten Behälter in Abhängigkeit von der Zeit t (in min).

Geben Sie eine Gleichung der Funktion h_1 an und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Lösung zur Aufgabe 2

Umfüllen von Wasser

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche des Behälters beträgt 20 cm.

Mögliche Vorgehensweise:

Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Höhe des Wasserpegels im Behälter 15 cm.

Gemäß der Volumensformel für Quader gilt: $6000 = a^2 \cdot 15 \Rightarrow a = 20$ cm.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtige Länge von a angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$h_1(t) = 6 \cdot t$$

Mögliche Vorgehensweise:

In vier Minuten fließen $(15 - 9) \cdot 20^2 = 2400$ cm³ Wasser vom ersten Behälter ab und somit in den zweiten Behälter ein, pro Minute folglich 600 cm³. Somit steigt der Wasserpegel im zweiten Behälter pro Minute um $\frac{600}{10^2} = 6$ cm.

oder:

Eine nur halb so große Seitenlänge der quadratischen Grundfläche bewirkt, dass der Flächeninhalt auf ein Viertel abnimmt. Daraus ergibt sich, dass die Anstiegsgeschwindigkeit des Wasserpegels vervierfacht wird.

Abflussgeschwindigkeit: $\frac{15 - 9}{4} = 1,5 \Rightarrow$ Anstiegsgeschwindigkeit: $4 \cdot 1,5 = 6$

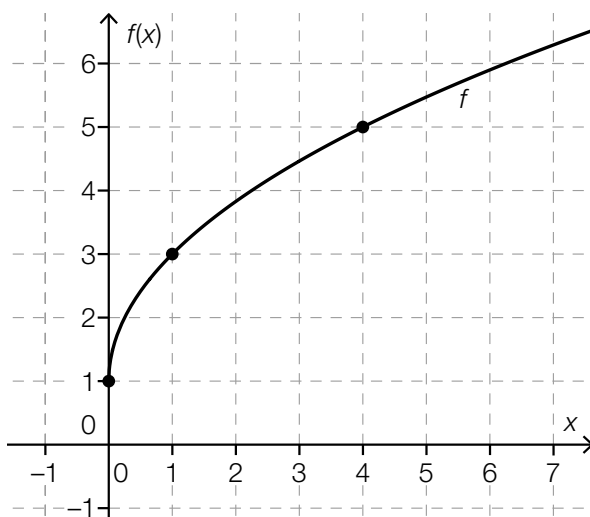
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Funktionsgleichung angegeben und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

Aufgabe 3

Zwei Funktionen

Gegeben sind zwei Funktionen f und g mit $f(x) = a \cdot \sqrt{x} + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) und $g(x) = \frac{1}{2} \cdot x + d$ ($d \in \mathbb{R}$).
Nachstehend ist der Graph von f abgebildet. Die Koordinaten der hervorgehobenen Punkte sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Geben Sie die Werte der Parameter a und b an!

Leitfrage:

Es gibt eine Stelle x_0 mit $f'(x_0) = g'(x_0)$.
Ermitteln Sie diese Stelle x_0 !

An dieser Stelle x_0 gilt weiters: $f(x_0) = g(x_0)$.

Geben Sie den Wert des Parameters d der Funktion g an und erläutern Sie, welche Aussage aufgrund der beiden für x_0 gegebenen Bedingungen über die Lagebeziehung zwischen den Graphen der Funktionen f und g getroffen werden kann!

Lösung zur Aufgabe 3

Zwei Funktionen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$f(0) = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$f(1) = 3 \Rightarrow a \cdot \sqrt{1} + b = 3 \Rightarrow a = 2$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Werte beider Parameter richtig angegeben werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$f(x) = 2 \cdot \sqrt{x} + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x_0) = g'(x_0) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = 4$$

$$f(4) = g(4) \Rightarrow 5 = \frac{1}{2} \cdot 4 + d \Rightarrow d = 3$$

Der Graph der Funktion g ist eine Tangente an den Graphen der Funktion f . Die Graphen der Funktionen f und g berühren einander im Punkt $(x_0 | f(x_0))$.

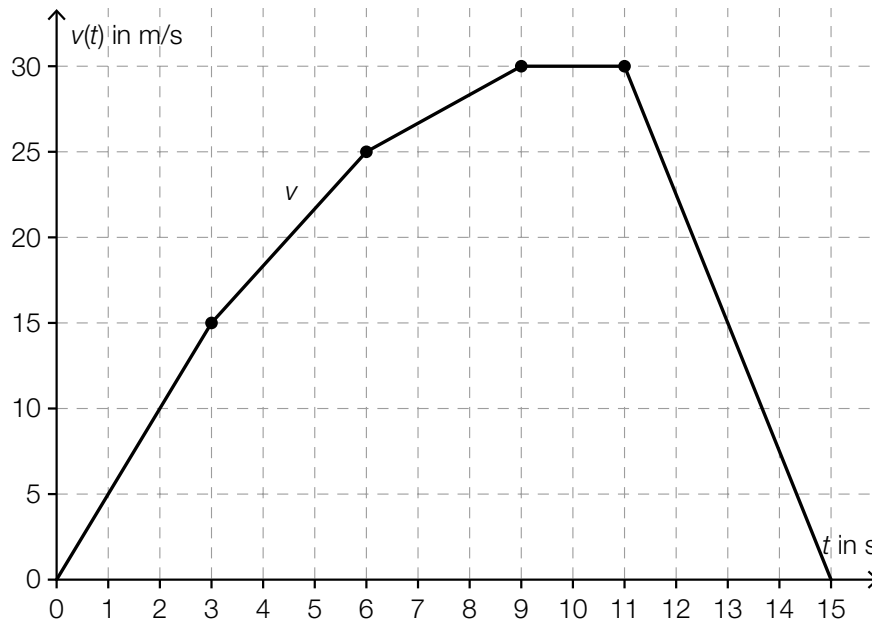
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtigen Werte von x_0 und d angegeben werden und die Lagebeziehung zwischen den beiden Funktionsgraphen (sinngemäß) korrekt erläutert wird.

Aufgabe 4

Autofahrt

Ein Auto fährt entlang eines geraden Streckenabschnitts. Im nachstehenden Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm ist die Geschwindigkeit $v(t)$ (in m/s) des Autos in Abhängigkeit von der Zeit t (in s) dargestellt. Dabei ist die Dauer der Fahrt in fünf Zeitintervalle unterteilt, in denen die Geschwindigkeitsfunktion jeweils linear modelliert wird. Die Koordinaten der hervorgehobenen Punkte sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Geben Sie die Beschleunigung a_1 des Autos im zweiten Zeitintervall samt der Maßeinheit an!

Leitfrage:

Zum Zeitpunkt t_1 hat das Auto eine Strecke von 100 m zurückgelegt. Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung, in welchem der fünf Zeitintervalle der Zeitpunkt t_1 liegt, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Geben Sie eine Gleichung zur Berechnung dieses Zeitpunkts t_1 an und ermitteln Sie den Wert von t_1 !

Lösung zur Aufgabe 4

Autofahrt

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$a_1 = \frac{10}{3} \text{ m/s}^2$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Beschleunigung a_1 samt Einheit korrekt angegeben wird.

Toleranzintervall: [3 m/s²; 3,5 m/s²]

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Der Zeitpunkt t_1 liegt im Zeitintervall [6; 9], da das Auto bis zum Ende des zweiten Zeitintervalls eine Strecke von 82,5 m zurückgelegt hat.

Die Funktion v kann im Intervall [6; 9] durch $v(t) = \frac{5}{3} \cdot t + 15$ modelliert werden.

Mögliche Gleichung zur Berechnung von t_1 : $\int_6^{t_1} v(t) dt = 17,5 \Rightarrow t_1 \approx 6,68$

Nach ca. 6,7 s hat das Auto eine Strecke von 100 m zurückgelegt.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn sowohl das Zeitintervall für t_1 korrekt angegeben und dies (sinngemäß) korrekt erläutert wird als auch t_1 korrekt ermittelt wird.

Toleranzintervall: [6,6; 6,7]

Aufgabe 5

Würfeln

Die Seitenflächen von zwei „fairen“ sechsflächigen Würfeln sind unterschiedlich beschriftet. (Ein Würfel ist „fair“, wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle sechs Seitenflächen gleich groß ist.)

Beim ersten Würfel sind zwei Flächen mit der Zahl 0 und vier Flächen mit der Zahl 4 beschriftet, beim zweiten Würfel sind drei Flächen mit der Zahl 1 und drei Flächen mit der Zahl 5 beschriftet.

Aufgabenstellung:

Bei einem Zufallsexperiment werden beide Würfel gleichzeitig geworfen.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der beiden gewürfelten Zahlen „5“ ergibt!

Leitfrage:

Spieler *A* darf einen der beiden Würfel auswählen, Spieler *B* muss den anderen Würfel nehmen. Derjenige Spieler, der die höhere Zahl würfelt, gewinnt.

Geben Sie an, welchen Würfel Spieler *A* wählen sollte, um die größeren Gewinnchancen zu haben, und begründen Sie Ihre Entscheidung durch Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeit für jeden Würfel!

Lösung zur Aufgabe 5

Würfeln

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$$P(\text{„Summe} = 5\text{“}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 0,5$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahrscheinlichkeit korrekt ermittelt wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Berechnung:

$$\left. \begin{aligned} P(\text{„Spieler A gewinnt mit dem ersten Würfel“}) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \\ P(\text{„Spieler A gewinnt mit dem zweiten Würfel“}) &= \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \text{ Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist bei der Wahl des zweiten Würfels größer.}$$

Spieler A sollte den zweiten Würfel wählen.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Wahl des für Spieler A günstigeren Würfels korrekt angegeben und begründet wird.