

|         |  |
|---------|--|
| Name:   |  |
| Klasse: |  |



Standardisierte kompetenzorientierte  
schriftliche Reifeprüfung

AHS

16. Jänner 2018

# Mathematik

Teil-2-Aufgaben

**BMB**

Bundesministerium  
für Bildung



# Hinweise zur Aufgabenbearbeitung

Sehr geehrte Kandidatin! Sehr geehrter Kandidat!

Das vorliegende Aufgabenheft zu Teil 2 enthält vier Aufgaben mit je zwei bis vier Teilaufgaben, wobei alle Teilaufgaben unabhängig voneinander bearbeitbar sind. Ihnen stehen dafür insgesamt *150 Minuten* an reiner Arbeitszeit zur Verfügung.

Verwenden Sie einen nicht radierbaren, blau oder schwarz schreibenden Stift! Bei Konstruktionsaufgaben ist auch die Verwendung eines Bleistifts möglich.

Verwenden Sie zur Bearbeitung dieser Aufgaben dieses Aufgabenheft und die Ihnen zur Verfügung gestellten Blätter! Schreiben Sie Ihren Namen auf der ersten Seite des Aufgabenheftes in das dafür vorgesehene Feld und auf jedes verwendete Blatt! Geben Sie bei der Beantwortung jeder Teilaufgabe deren Bezeichnung an!

In die Beurteilung wird alles einbezogen, was nicht durchgestrichen ist. Die Lösung muss dabei klar ersichtlich sein. Wenn die Lösung nicht klar ersichtlich ist oder verschiedene Lösungen angegeben sind, gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Streichen Sie Ihre Notizen durch.

Sie dürfen eine approbierte Formelsammlung sowie die gewohnten elektronischen Hilfsmittel verwenden.

Abzugeben sind das Aufgabenheft und alle von Ihnen verwendeten Blätter.

## Beurteilung

Jede Aufgabe in Teil 1 wird mit 0 Punkten oder 1 Punkt bewertet, jede Teilaufgabe in Teil 2 mit 0, 1 oder 2 Punkten. Die mit **A** gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden mit 0 Punkten oder 1 Punkt bewertet.

- Werden im Teil 1 mindestens 16 von 24 Aufgaben richtig gelöst, wird die Arbeit positiv bewertet.
- Werden im Teil 1 weniger als 16 von 24 Aufgaben richtig gelöst, werden mit **A** markierte Aufgabenstellungen aus Teil 2 zum Ausgleich (für den laut LBVO „wesentlichen Bereich“) herangezogen.  
Werden unter Berücksichtigung der mit **A** markierten Aufgabenstellungen aus Teil 2 mindestens 16 Aufgaben richtig gelöst, wird die Arbeit positiv bewertet.  
Werden auch unter Berücksichtigung der mit **A** markierten Aufgabenstellungen aus Teil 2 weniger als 16 Aufgaben richtig gelöst, wird die Arbeit mit „Nicht genügend“ beurteilt.
- Werden im Teil 1 mindestens 16 Punkte (mit Berücksichtigung der Ausgleichspunkte **A**) erreicht, so gilt folgender Beurteilungsschlüssel:

|              |              |
|--------------|--------------|
| Genügend     | 16–23 Punkte |
| Befriedigend | 24–32 Punkte |
| Gut          | 33–40 Punkte |
| Sehr gut     | 41–48 Punkte |

## Erläuterung der Antwortformate

Die Aufgaben haben einerseits **freie Antwortformate**; dabei schreiben Sie Ihre Antwort direkt unter die jeweilige Aufgabenstellung in das Aufgabenheft oder auf die zur Verfügung gestellten Blätter. Weitere Antwortformate, die in der Klausur zum Einsatz kommen können, werden im Folgenden vorgestellt:

**Zuordnungsformat:** Dieses Antwortformat ist durch mehrere Aussagen (bzw. Tabellen oder Abbildungen) gekennzeichnet, denen mehrere Antwortmöglichkeiten gegenüberstehen. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die Antwortmöglichkeiten durch Eintragen der **entsprechenden Buchstaben** den jeweils zutreffenden Aussagen zuordnen!

### Beispiel:

Gegeben sind zwei Gleichungen.

|                 |   |
|-----------------|---|
| $1 + 1 = 2$     | A |
| $2 \cdot 2 = 4$ | C |

|   |                |
|---|----------------|
| A | Addition       |
| B | Division       |
| C | Multiplikation |
| D | Subtraktion    |

### Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den zwei Gleichungen jeweils die entsprechende Bezeichnung (aus A bis D) zu!

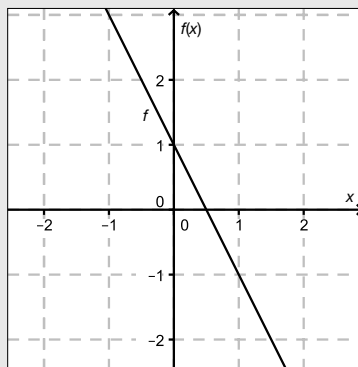
**Konstruktionsformat:** Eine Aufgabe und deren Aufgabenstellung sind vorgegeben. Die Aufgabe erfordert die Ergänzung von Punkten, Geraden und/oder Kurven im Aufgabenheft.

**Beispiel:**

Gegeben ist eine lineare Funktion  $f$  mit  $f(x) = k \cdot x + d$ .

**Aufgabenstellung:**

Zeichnen Sie den Graphen einer linearen Funktion mit den Bedingungen  $k = -2$  und  $d > 0$  in das vorgegebene Koordinatensystem ein!



**Multiple-Choice-Format in der Variante „1 aus 6“:** Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und sechs Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei **eine Antwortmöglichkeit** auszuwählen ist. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die einzige zutreffende Antwortmöglichkeit ankreuzen!

**Beispiel:**

Welche Gleichung ist korrekt?

**Aufgabenstellung:**

Kreuzen Sie die zutreffende Gleichung an!

|             |                                     |
|-------------|-------------------------------------|
| $1 + 1 = 1$ | <input type="checkbox"/>            |
| $2 + 2 = 2$ | <input type="checkbox"/>            |
| $3 + 3 = 3$ | <input type="checkbox"/>            |
| $4 + 4 = 8$ | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $5 + 5 = 5$ | <input type="checkbox"/>            |
| $6 + 6 = 6$ | <input type="checkbox"/>            |

**Multiple-Choice-Format in der Variante „2 aus 5“:** Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und fünf Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei **zwei Antwortmöglichkeiten** auszuwählen sind. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die beiden zutreffenden Antwortmöglichkeiten ankreuzen!

**Beispiel:**

Welche Gleichungen sind korrekt?

**Aufgabenstellung:**

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an!

|             |                                     |
|-------------|-------------------------------------|
| $1 + 1 = 1$ | <input type="checkbox"/>            |
| $2 + 2 = 4$ | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $3 + 3 = 3$ | <input type="checkbox"/>            |
| $4 + 4 = 8$ | <input checked="" type="checkbox"/> |
| $5 + 5 = 5$ | <input type="checkbox"/>            |

**Multiple-Choice-Format in der Variante „x aus 5“:** Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und fünf Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei **eine, zwei, drei, vier oder fünf Antwortmöglichkeiten** auszuwählen sind. In der Aufgabenstellung finden Sie stets die Aufforderung „Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n)/ Gleichung(en)/... an!“. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die zutreffende Antwortmöglichkeit/die zutreffenden Antwortmöglichkeiten ankreuzen!

**Beispiel:**  
Welche der gegebenen Gleichungen ist/sind korrekt?

|            |                                     |
|------------|-------------------------------------|
| 1 + 1 = 2  | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 2 + 2 = 4  | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 3 + 3 = 6  | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 4 + 4 = 4  | <input type="checkbox"/>            |
| 5 + 5 = 10 | <input checked="" type="checkbox"/> |

**Aufgabenstellung:**  
Kreuzen Sie die zutreffende(n) Gleichung(en) an!

**Lückentext:** Dieses Antwortformat ist durch einen Satz mit zwei Lücken gekennzeichnet, das heißt, im Aufgabentext sind zwei Stellen ausgewiesen, die ergänzt werden müssen. Für jede Lücke werden je drei Antwortmöglichkeiten vorgegeben. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die Lücken durch Ankreuzen der **beiden zutreffenden Antwortmöglichkeiten** füllen!

**Beispiel:**  
Gegeben sind 3 Gleichungen.

**Aufgabenstellung:**  
Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Die Gleichung \_\_\_\_\_<sup>①</sup>\_\_\_\_\_ wird als Zusammenzählung oder \_\_\_\_\_<sup>②</sup>\_\_\_\_\_ bezeichnet.

| ①         |                                     |
|-----------|-------------------------------------|
| 1 - 1 = 0 | <input type="checkbox"/>            |
| 1 + 1 = 2 | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 1 · 1 = 1 | <input type="checkbox"/>            |

| ②              |                                     |
|----------------|-------------------------------------|
| Multiplikation | <input type="checkbox"/>            |
| Subtraktion    | <input type="checkbox"/>            |
| Addition       | <input checked="" type="checkbox"/> |

**So ändern Sie Ihre Antwort bei Aufgaben zum Ankreuzen:**

- Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
- Kreuzen Sie dann das gewünschte Kästchen an.

|           |                                     |
|-----------|-------------------------------------|
| 1 + 1 = 3 | <input type="checkbox"/>            |
| 2 + 2 = 4 | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 3 + 3 = 5 | <input type="checkbox"/>            |
| 4 + 4 = 4 | <input type="checkbox"/>            |
| 5 + 5 = 9 | <input checked="" type="checkbox"/> |

Hier wurde zuerst die Antwort „5 + 5 = 9“ gewählt und dann auf „2 + 2 = 4“ geändert.

**So wählen Sie eine bereits übermalte Antwort:**

- Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
- Kreisen Sie das gewünschte übermalte Kästchen ein.

|           |                                     |
|-----------|-------------------------------------|
| 1 + 1 = 3 | <input type="checkbox"/>            |
| 2 + 2 = 4 | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 3 + 3 = 5 | <input type="checkbox"/>            |
| 4 + 4 = 4 | <input checked="" type="checkbox"/> |
| 5 + 5 = 9 | <input type="checkbox"/>            |

Hier wurde zuerst die Antwort „2 + 2 = 4“ übermalte und dann wieder gewählt.

Wenn Sie jetzt noch Fragen haben, wenden Sie sich bitte an Ihre Lehrerin/Ihren Lehrer!

**Viel Erfolg bei der Bearbeitung!**

# Aufgabe 1

## Funktion

Gegeben ist eine quadratische Funktion  $f$  mit  $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  mit den Koeffizienten  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

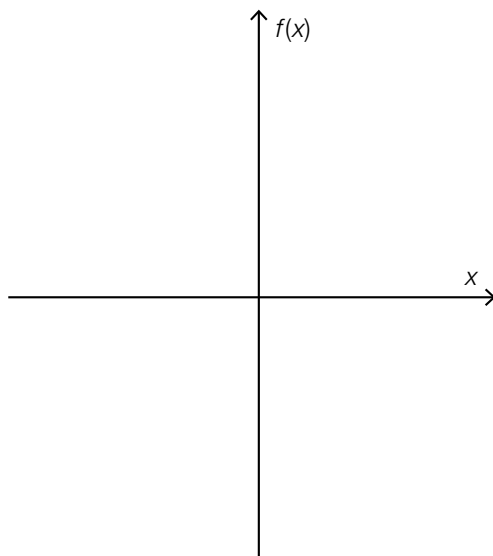
Aufgabenstellung:

- a) Bestimmen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes  $P$  des Graphen einer solchen Funktion  $f$ , in dem der Anstieg der Tangente an den Graphen der Funktion  $f$  den Wert  $b$  hat, und geben Sie weiters eine (allgemeine) Gleichung dieser Tangente  $t$  an!

Der Graph einer solchen Funktion  $f$  verläuft durch den Punkt  $A = (-1|20)$  und hat im Punkt  $P$  eine Tangente  $t$  mit  $t(x) = 9 \cdot x + 4$ . Geben Sie für diese Funktion  $f$  die Werte von  $a, b$  und  $c$  an!

- b) Geben Sie  $a$  in Abhängigkeit von  $b$  und  $c$  so an, dass die Funktion  $f$  genau eine Nullstelle hat!

Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem einen möglichen Graphen einer solchen Funktion  $f$  mit genau einer Nullstelle und  $a > 0, b > 0, c > 0$ !



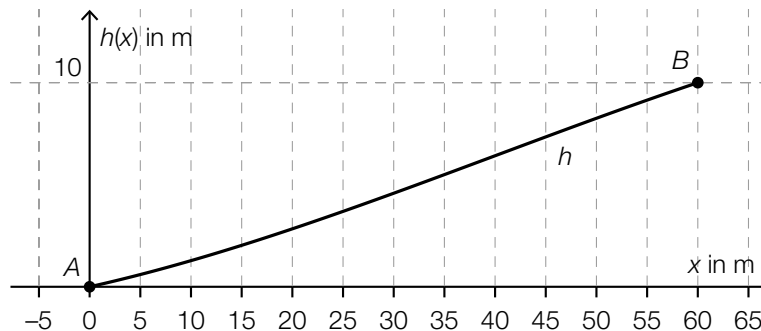
- c)  A Geben Sie für  $a = 16$  und  $c = 9$  sowohl die Stelle des lokalen Extremums der Funktion  $f$  als auch den zugehörigen Funktionswert in Abhängigkeit von  $b$  an!

Zeigen Sie, dass dieser Extrempunkt unabhängig von der Wahl von  $b$  auf dem Graphen der Funktion  $g$  mit  $g(x) = 9 - 16 \cdot x^2$  liegt!

## Aufgabe 2

### Ansteigende Straße

Ein Auto legt auf einem ansteigenden, kurvenfreien Straßenabschnitt in einem bestimmten Zeitintervall den Weg zwischen den Punkten  $A$  und  $B$  zurück. Der Höhenverlauf dieses Straßenabschnitts zwischen  $A$  und  $B$  bezogen auf das Niveau des Punktes  $A$  wird durch den Graphen einer Polynomfunktion  $h$  in Abhängigkeit von  $x$  modelliert. Dabei ist  $x$  die waagrechte Entfernung des (punktförmig modellierten) Autos vom Ausgangspunkt  $A$  und  $h(x)$  die jeweilige Höhe der Position des Autos über dem Niveau des Punktes  $A$  ( $h(x)$  in m,  $x$  in m). In diesem Modell haben die Punkte  $A$  und  $B$  die Koordinaten  $A = (0|0)$  und  $B = (60|10)$ .



Eine Gleichung der Funktion  $h$  lautet:

$$h(x) = \frac{1}{64800} \cdot (-x^3 + 120 \cdot x^2 + 7200 \cdot x) \text{ für } x \in [0; 60]$$

**Aufgabenstellung:**

- a) Geben Sie den Wert des Differenzenquotienten der Funktion  $h$  im Intervall  $[0; 60]$  an und interpretieren Sie diesen Wert im gegebenen Kontext!

Eine Person behauptet: „Wenn ein (beliebiger) ansteigender Straßenabschnitt durch eine Polynomfunktion dritten Grades modelliert werden kann, deren Wendestelle im betreffenden Abschnitt liegt, so handelt es sich bei dieser Wendestelle um diejenige Stelle, an der die Straße am steilsten verläuft.“

Geben Sie an, ob diese Behauptung mit Sicherheit zutrifft, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

- b) Ein Neubau der Straße ist geplant, wobei die Straße zwischen  $A$  und  $B$  nach dem Neubau eine konstante Steigung aufweisen soll.

**A** Bestimmen Sie eine Gleichung der Funktion  $h_1$ , die den Verlauf der neuen Straße zwischen  $A$  und  $B$  beschreibt, wobei  $h_1(x)$  wieder die Höhe (in m) der Position des Autos über dem Niveau des Punktes  $A$  ist!

Berechnen Sie denjenigen Winkel  $\alpha$ , unter dem die neu gebaute Straße (bezüglich der Horizontalen) ansteigt!

- c) Bei einer Fahrt ins Gebirge entsteht ein unangenehmer Druck auf das Trommelfell, den viele Menschen als ein „Verschlagen“ der Ohren beschreiben. Man kann annehmen, dass bei einer Person im Auto dieses unangenehme Druckgefühl auftritt, wenn die momentane Änderungsrate der Höhe einen Wert von 4 m/s überschreitet.

Die Funktion  $g$  mit  $g(t) = \frac{1}{5} \cdot t^2 + t$  modelliert die Position des Autos über dem Niveau von  $A$  während der Fahrt von  $A = (0|0)$  nach  $B = (60|10)$  in Abhängigkeit von der Zeit. Dabei beschreibt  $g(t)$ , in welcher Höhe sich das Auto zum Zeitpunkt  $t$  befindet ( $g(t)$  in Metern;  $t$  in Sekunden gemessen ab dem Zeitpunkt, in dem sich das Auto im Punkt  $A$  befindet).

Berechnen Sie, wie viele Sekunden die Fahrt von  $A$  nach  $B$  dauert!

Geben Sie an, ob die momentane Änderungsrate der Höhe während dieser Zeitspanne einen Wert von 4 m/s überschreitet, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

# Aufgabe 3

## Human Development Index

Der Human Development Index (*HDI*) der Vereinten Nationen ist ein Wohlstandsindikator für Länder, der eine Messung des Entwicklungsstandes des jeweiligen Landes ermöglichen sollte. Der *HDI* beinhaltet drei dimensionslose Größen (Lebenserwartungsindex (*LEI*), Bildungsindex (*BI*) und Einkommensindex (*EI*)) und wird mit der Formel  $HDI = \sqrt[3]{LEI \cdot BI \cdot EI}$  berechnet. Dimensionslos bedeutet, dass diese Größen keine Einheiten haben.

Für die Berechnung der Indizes *LEI* und *EI* gilt seit 2010:

$$LEI = \frac{LE - 20}{85 - 20}, \text{ wobei } LE \text{ die Lebenserwartung zum Zeitpunkt der Geburt in Jahren beschreibt}$$

$$EI = \frac{\ln(B) - \ln(100)}{\ln(75000) - \ln(100)}, \text{ wobei } B \text{ das Bruttonationaleinkommen pro Kopf in US-Dollar (immer zu Jahresbeginn) beschreibt}$$

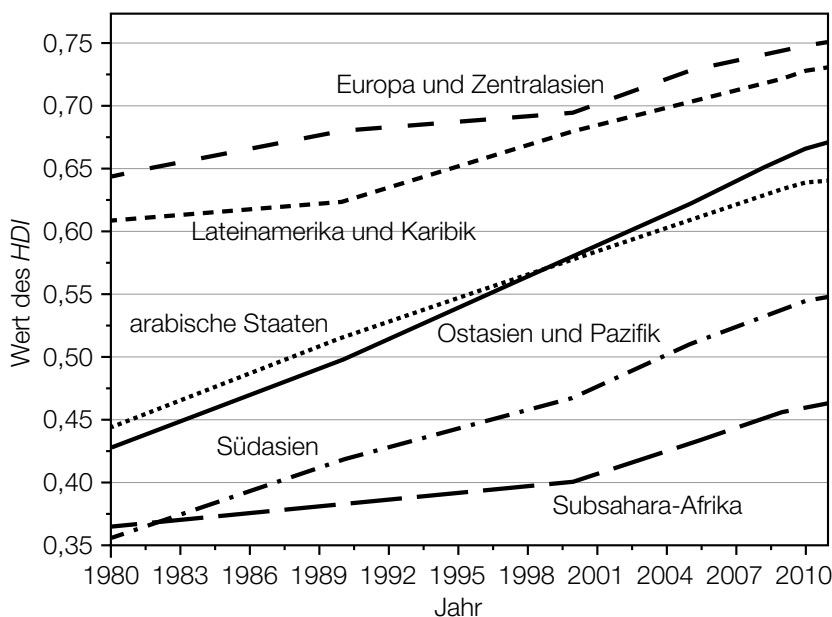
Das Entwicklungsprogramm der Vereinten Nationen unterteilt die Länder nach dem Wert des *HDI* seit 2009 in vier Entwicklungskategorien:

| Entwicklungskategorie eines Landes | Wert des <i>HDI</i> |
|------------------------------------|---------------------|
| $E_1$                              | $\geq 0,8$          |
| $E_2$                              | $[0,7; 0,8)$        |
| $E_3$                              | $[0,55; 0,7)$       |
| $E_4$                              | $< 0,55$            |

Datenquelle: Deutsche Gesellschaft für die Vereinten Nationen (Hrsg.): *Bericht über die menschliche Entwicklung 2015. Arbeit und menschliche Entwicklung*. Berlin: Berliner Wissenschafts-Verlag 2015, S. 240.

Der *HDI* einer Region in einem bestimmten Jahr ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel der *HDI*s der zu dieser Region zählenden Länder.

Die Entwicklung des *HDI* verschiedener Regionen zwischen 1980 und 2011 ist nachstehend abgebildet.



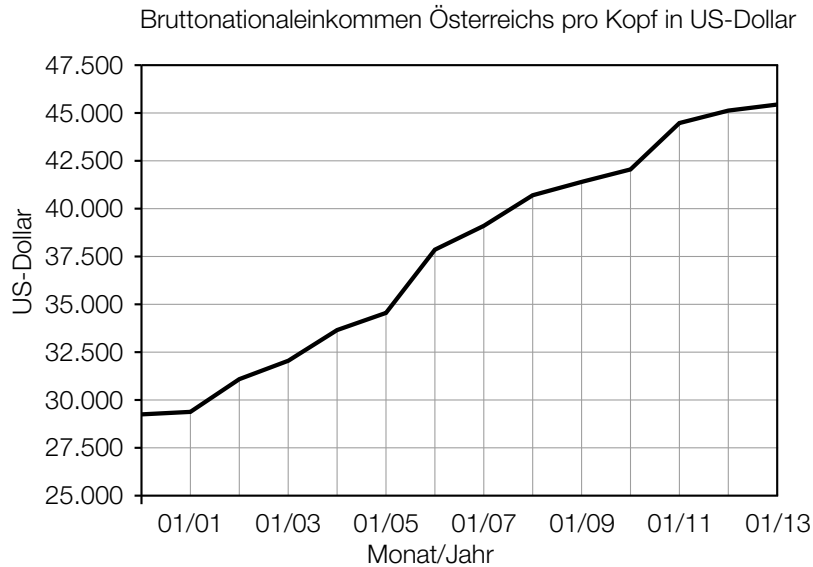
Datenquelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Index\\_der\\_menschlichen\\_Entwicklung#/media/File:Human-Development-Index-Trends-2011.svg](https://de.wikipedia.org/wiki/Index_der_menschlichen_Entwicklung#/media/File:Human-Development-Index-Trends-2011.svg) [08.06.2017].



### Aufgabenstellung:

- a) Für Österreich wurde im *Human Development Report* für das Jahr 2013 die Lebenserwartung mit  $LE = 81,1$  Jahren und der Bildungsindex mit  $BI = 0,819$  angegeben.

Die nachstehende Abbildung zeigt für die Jahre 2000 bis 2013 (jeweils zu Jahresbeginn) das Bruttonationaleinkommen Österreichs pro Kopf in US-Dollar.



Datenquelle: <http://www.factfish.com/de/statistik/bruttonationaleinkommen> [08.06.2017].

Ermitteln Sie für das Jahr 2013 den  $HDI$  von Österreich ( $= HDI_{2013}$ )!

Der  $HDI$  von Österreich für das Jahr 2013 ( $HDI_{2013}$ ) war um ca. 2,5 % größer als der  $HDI$  von Österreich für das Jahr 2008 ( $HDI_{2008}$ ). Geben Sie eine Gleichung an, die diesen Zusammenhang beschreibt, und berechnen Sie den  $HDI_{2008}$ !

- b) Die jährliche Entwicklung des  $HDI$  der Region „arabische Staaten“ kann im Zeitraum von 1980 bis 2010 näherungsweise durch eine lineare Funktion  $H$  mit der Gleichung  $H(t) = k \cdot t + d$  mit  $k, d \in \mathbb{R}$  und  $t$  in Jahren beschrieben werden, wobei  $H(0)$  dem Wert des Jahres 1980 entspricht.

Bestimmen Sie die Werte der Parameter  $k$  und  $d$ !

Begründen Sie anhand der entsprechenden Abbildung, in welcher Region/in welchen Regionen die mittlere jährliche Zunahme des  $HDI$  im Zeitraum von 1980 bis 2010 am ehesten jener der Region „arabische Staaten“ entsprach!

- c)  A) Ermitteln Sie aus der entsprechenden Abbildung diejenige Jahreszahl, ab der die Region „Lateinamerika und Karibik“ die Entwicklungskategorie  $E_2$  aufweist!

Gilt ab diesem Zeitpunkt sicher, dass ungefähr die Hälfte der zu dieser Region zählenden Länder eine Entwicklungskategorie  $E_2$  aufweist? Begründen Sie Ihre Antwort!

# Aufgabe 4

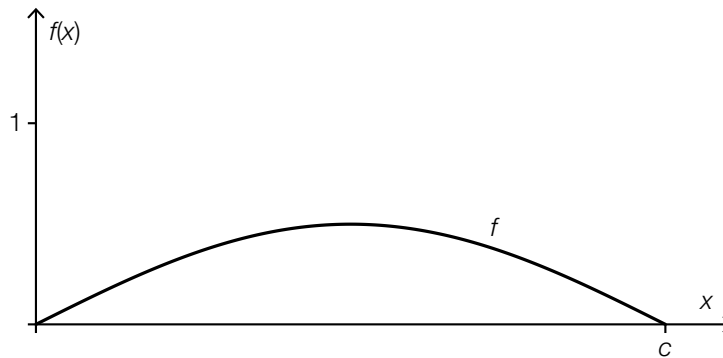
## Dichtefunktion und Verteilungsfunktion

Es sei  $X$  eine Zufallsvariable, für die sich die Wahrscheinlichkeit, dass  $X$  in einem Intervall  $I$  liegt, mithilfe einer sogenannten Dichtefunktion  $f$  folgendermaßen ermitteln lässt:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx \text{ für alle } a, b \in I \text{ mit } a \leq b$$

In diesem Fall gilt für die Verteilungsfunktion  $F: F(x) = P(X \leq x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , d. h. insbesondere  $F(b) - F(a) = P(a \leq X \leq b)$  für  $a, b \in I$  und  $a \leq b$ .

Die nachstehende Grafik zeigt den Graphen einer Dichtefunktion  $f$  mit  $f(x) = k \cdot \sin(x)$  für  $x \in [0; c]$ , wobei  $k \in \mathbb{R}, k > 0$  und  $f(c) = 0$  gilt. Für  $x \notin [0; c]$  gilt:  $f(x) = 0$ .



### Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie für die gegebene Dichtefunktion  $f$  den Funktionswert  $F(0)$  der zugehörigen Verteilungsfunktion  $F$  an und begründen Sie, warum  $F(c) = 1$  ist!

$$F(0) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Skizzieren Sie in der oben stehenden Grafik den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion  $F$  und beschreiben Sie das Krümmungsverhalten von  $F$  im Intervall  $[0; c]$ !

- b) Geben Sie an, durch welche Eigenschaft von  $f$  der Wert des Parameters  $k$  festgelegt ist, und berechnen Sie den Wert von  $k$ !

Geben Sie einen Term der zugehörigen Verteilungsfunktion  $F$  im Intervall  $[0; c]$  an!

$$F(x) = \underline{\hspace{10cm}}$$

c) Für ein Ereignis  $E$  gilt:  $P(E) = 1 - P(X \leq c - a)$  für ein beliebiges  $a \in [0; c]$ .

A Beschreiben Sie dieses Ereignis  $E$  verbal!

Stellen Sie für  $a \leq \frac{c}{2}$  die Wahrscheinlichkeit  $P(a \leq X \leq c - a)$  in nachstehender Grafik als Fläche dar und begründen Sie den Zusammenhang  $P(a \leq X \leq c - a) = 1 - 2 \cdot P(X \leq a)$  anhand dieser Darstellung!

