Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reife- und Diplomprüfung

BHS

28. September 2017

Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 6)

Korrekturheft

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Korrektur- und Beurteilungsanleitung zur standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

(Detaillierte Informationen dazu finden Sie für den BHS-Bereich im entsprechenden Erlass zur Beurteilung, der auf der Website https://ablauf.srdp.at/ abrufbar ist.)

Kompetenzbereiche

Im Beurteilungsmodell für die Angewandte Mathematik wird zwischen zwei Kompetenzbereichen unterschieden:

- *Kompetenzbereich A* (**KA**) umfasst die unabhängig[1] erreichbaren Punkte der Komplexitätsstufen 1 und 2 aus dem Kompetenzstufenraster.
- *Kompetenzbereich B* (**KB**) umfasst die abhängig erreichbaren Punkte und die Punkte der Komplexitätsstufen 3 und 4 aus dem Kompetenzstufenraster.

Die Summe der unabhängig erreichbaren Punkte aus den Komplexitätsstufen 1 und 2 (**KA**) stellt die „wesentlichen Bereiche" eines Klausurheftes dar.

Beurteilung

Als Hilfsmittel für die Beurteilung wird ein auf ein Punktesystem basierender Beurteilungsschlüssel angegeben. Je nach gewichteter Schwierigkeit der vergebenen Punkte in den „wesentlichen Bereichen" wird festgelegt, ab wann die „wesentlichen Bereiche überwiegend" (Genügend) erfüllt sind, d. h., gemäß einem Punkteschema müssen Punkte aus dem Kompetenzbereich A unter Einbeziehung von Punkten aus dem Kompetenzbereich B in ausreichender Anzahl abhängig von der Zusammenstellung der Klausurhefte gelöst werden. Darauf aufbauend wird die für die übrigen Notenstufen zu erreichende Punktezahl festgelegt.

Nach der Punkteermittlung soll die Arbeit der Kandidatin / des Kandidaten nochmals ganzheitlich qualitativ betrachtet werden. Unter Zuhilfenahme des Punkteschemas und der ganzheitlichen Betrachtung ist von der Prüferin / vom Prüfer ein verbal begründeter Beurteilungsvorschlag zu erstellen, wobei die Ergebnisse der Kompetenzbereiche A und B in der Argumentation zu verwenden sind.

Beurteilungsschlüssel für die vorliegende Klausur:

44–48 Punkte	Sehr gut
39–43 Punkte	Gut
34–38 Punkte	Befriedigend
23–33 Punkte	Genügend
0–22 Punkte	Nicht genügend

[1] Unabhängige Punkte sind solche, für die keine mathematische Vorleistung erbracht werden muss. Als mathematische Vorleistung gilt z. B. das Aufstellen einer Gleichung (unabhängiger Punkt) mit anschließender Berechnung (abhängiger Punkt).

Handreichung zur Korrektur der standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

1. In der Lösungserwartung ist nur **ein möglicher** Lösungsweg angegeben. Andere richtige Lösungswege sind als gleichwertig anzusehen.

2. Der Lösungsschlüssel ist unter Beachtung folgender Vorgangsweisen **verbindlich** anzuwenden:

   a. Punkte sind nur zu vergeben, wenn die abgefragte Handlungskompetenz in der Bearbeitung vollständig erfüllt ist.

   b. Berechnungen ohne nachvollziehbaren Rechenansatz bzw. ohne nachvollziehbare Dokumentation des Technologieeinsatzes (verwendete Ausgangsparameter und die verwendete Technologiefunktion müssen angegeben sein) sind mit null Punkten zu bewerten.

   c. Werden zu einer Teilaufgabe mehrere Lösungen bzw. Lösungswege von der Kandidatin / vom Kandidaten angeboten und nicht alle diese Lösungen bzw. Lösungswege sind korrekt, so ist diese Teilaufgabe mit null Punkten zu bewerten.

   d. Bei abhängiger Punktevergabe gilt das Prinzip des Folgefehlers. Das heißt zum **Beispiel**: Wird von der Kandidatin / vom Kandidaten zu einem Kontext ein falsches Modell aufgestellt, mit diesem Modell aber eine richtige Berechnung durchgeführt, so ist der Berechnungspunkt zu vergeben, wenn das falsch aufgestellte Modell die Berechnung nicht vereinfacht.

   e. Werden von der Kandidatin / vom Kandidaten kombinierte Handlungsanweisungen in einem Lösungsschritt erbracht, so sind alle Punkte zu vergeben, auch wenn der Lösungsschlüssel Einzelschritte vorgibt.

   f. Abschreibfehler, die aufgrund der Dokumentation der Kandidatin / des Kandidaten als solche identifizierbar sind, sind ohne Punkteabzug zu bewerten, wenn sie zu keiner Vereinfachung der Aufgabenstellung führen.

   g. Rundungsfehler können vernachlässigt werden, wenn die Rundung nicht explizit eingefordert ist.

   h. Jedes Diagramm bzw. jede Skizze, die Lösung einer Handlungsanweisung ist, muss eine qualitative Achsenbeschriftung enthalten, andernfalls ist dies mit null Punkten zu bewerten.

   i. Die Angabe von Einheiten kann bei der Punktevergabe vernachlässigt werden, sofern sie im Lösungsschlüssel nicht explizit eingefordert wird.

Aufgabe 1

Wellness

Möglicher Lösungsweg

a) $s(t) = -4 \cdot t + 60$

t ... Zeit in min
$s(t)$ ... Sandmenge zur Zeit t in g

b) $A = 18 + \int_3^{13} g(x)\,\mathrm{d}x$

$90 \cdot 56 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}97 = 5\,866{,}56$

Die Gesamtkosten betragen € 5.866,56.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung (KA)
b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung der Gesamtkosten (KA)

Aufgabe 2

Wechselkurse

Möglicher Lösungsweg

a) $F = (B - G) \cdot w$

b) $0{,}134 \cdot F + 3{,}83 = 0{,}135 \cdot F + 2{,}02$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $F = 1\,810$

Für Beträge in der Fremdwährung, die größer als 1 810 sind, ist die Möglichkeit A für die Urlauberin günstiger.

c) Diese Argumentation ist falsch, weil die Skalierung der y-Achse nicht bei 0 „beginnt“, sondern bei 7,56.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung von F aus B, G und w (KA)
b) 1 × A: für die richtige Modellierung (KA)
1 × B: für das richtige Ermitteln der Beträge in der Fremdwährung, für die die Bezahlung mit der Möglichkeit A für die Urlauberin günstiger ist (KB)
c) 1 × D: für die richtige Erklärung, warum diese Argumentation falsch ist (KA)

Aufgabe 3

Äpfel

Möglicher Lösungsweg

a) Interquartilsabstand: $230 - 200 = 30$
3. Quartil: 230
$230 + 1{,}5 \cdot 30 = 275$

Äpfel mit einer Masse von mehr als 275 g werden als „Ausreißer nach oben“ bezeichnet.

b) Berechnung des symmetrischen Intervalls mittels Technologieeinsatz:
$P(\mu - a < X < \mu + a) = 0{,}90 \quad \Rightarrow \quad [117{,}8; 282{,}2]$

c) Ein zufällig ausgewählter Apfel hat mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % eine Masse zwischen 180 g und 200 g.

Aufgrund der Symmetrie der Glockenkurve gilt:
$P(X > 200) = 15\,\%$

d) X ... Anzahl der wurmstichigen Äpfel
Binomialverteilung mit $n = 200$ und $p = \frac{1}{30}$
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \leq 5) = 0{,}34133... \approx 34{,}13\,\%$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Angeben der Masse, ab der ein Apfel als „Ausreißer nach oben“ bezeichnet wird (KA)
b) 1 × B: für die richtige Berechnung des symmetrischen Intervalls (KA)
c) 1 × C1: für die richtige Interpretation der Fläche im gegebenen Sachzusammenhang (KA)
1 × C2: für das richtige Ermitteln der Wahrscheinlichkeit (KB)
d) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit (KA)

Aufgabe 4

Unter Wasser

Möglicher Lösungsweg

a) $3{,}9 = 1 + 0{,}1 \cdot x \;\Rightarrow\; x = 29$
In einer Wassertiefe von 29 Metern herrscht ein Druck von 3,9 Bar.

b) In einer Tiefe von 20 Metern beträgt die Beleuchtungsstärke 5 000 Lux.
Toleranzbereich: [19,5; 20,5]
$f(x) = a \cdot b^x$
$a = 50\,000$
$5\,000 = 50\,000 \cdot b^{20} \;\Rightarrow\; b = \sqrt[20]{0{,}1} = 0{,}8912... \approx 0{,}891$
$f(x) = 50\,000 \cdot 0{,}891^x$
Geringfügige Abweichungen aufgrund der Verwendung anderer Punkte sind zulässig.

c) $v = \frac{s}{t} = \frac{0{,}57}{0{,}4 \cdot 10^{-3}}$ m/s $= 1\,425$ m/s

d) tatsächliche Größe: x
wahrgenommene Größe: $w = \frac{4}{3} \cdot x \;\Rightarrow\; x = \frac{3}{4} \cdot w$

Die tatsächliche Größe ist um 25 % kleiner als die wahrgenommene Größe.

Lösungsschlüssel

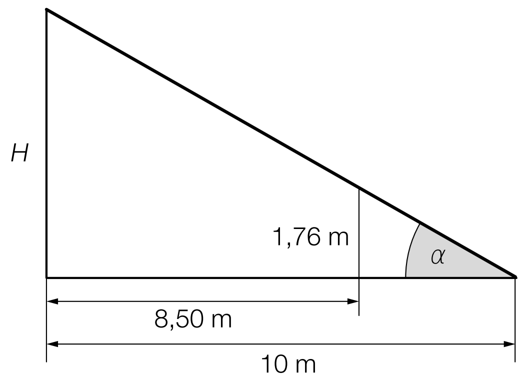
a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wassertiefe mit 3,9 Bar Druck (KA)
b) 1 × C: für das richtige Ablesen der Wassertiefe im Toleranzbereich [19,5; 20,5] (KA)
1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung (KB)
Geringfügige Abweichungen aufgrund der Verwendung anderer Punkte sind zulässig.
c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Schallgeschwindigkeit in m/s (KA)
d) 1 × A: für das richtige Ermitteln des Prozentsatzes (KA)

Aufgabe 5

Maibaum aufstellen

Möglicher Lösungsweg

a)



$\tan(\alpha) = \frac{1{,}76}{1{,}5} \Rightarrow \alpha = 49{,}55...° \approx 49{,}6°$

b) $\tan(26{,}6°) = \frac{H}{50} \Rightarrow H = 25{,}03...$

$\tan(\gamma) = \frac{H}{25} \Rightarrow \gamma = 45{,}04...° \approx 45{,}0°$

Die Behauptung stimmt also nicht, weil $2 \cdot 26{,}6° \neq 45{,}0°$.

Auch eine richtige Argumentation mithilfe der allgemeinen Eigenschaften der Tangensfunktion ist zulässig.

c) $\sin(\gamma) = \frac{x}{H - x} \Rightarrow x = \frac{H \cdot \sin(\gamma)}{1 + \sin(\gamma)}$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen aller Größen in der Skizze (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung des Höhenwinkels α (KB)

b) 1 × D: für den richtigen Nachweis (KA)
Auch eine richtige Argumentation mithilfe der allgemeinen Eigenschaften der Tangensfunktion ist zulässig.

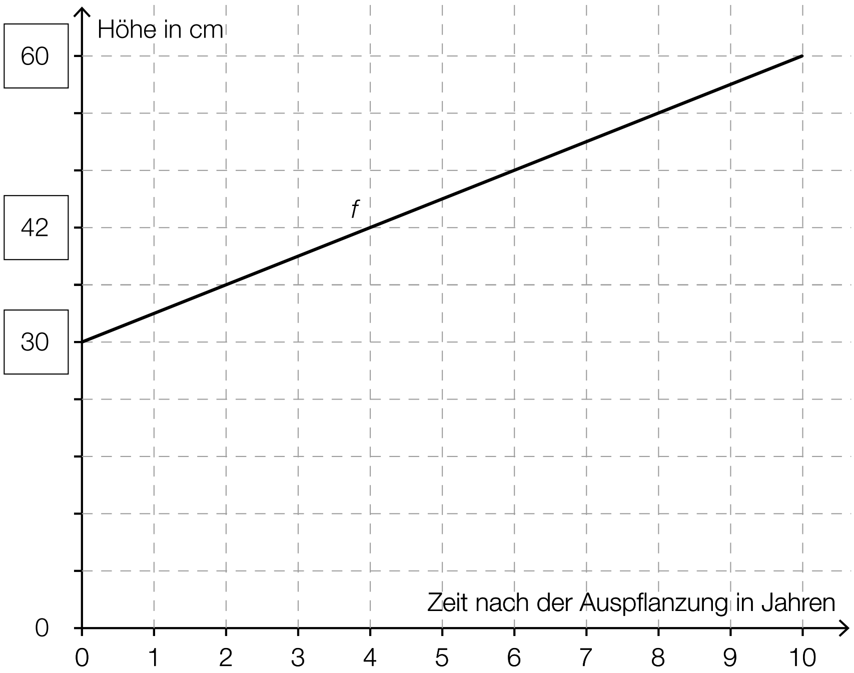
c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel (KB)

Aufgabe 6

Buchsbäume

Möglicher Lösungsweg

a)



b) Zeitpunkt des stärksten Höhenwachstums: $g''(t) = 0$
Berechnung mittels Technologieeinsatz: $t = 6{,}16... \approx 6{,}2$

Etwa 6,2 Jahre nach der Auspflanzung ist das Höhenwachstum am größten.

Mit dem Ausdruck $g(5) - g(0)$ wird der (absolute) Höhenzuwachs in cm in den ersten 5 Jahren nach der Auspflanzung berechnet.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Eintragen der fehlenden Werte (KB)
b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts des stärksten Höhenwachstums (KB)
(In der Grafik ist klar zu erkennen, dass an der Wendestelle das stärkste Höhenwachstum vorliegt. Eine rechnerische Überprüfung des Steigungsverhaltens der Funktion an der berechneten Stelle sowie eine Überprüfung der Randstellen sind daher nicht erforderlich.)
1 × C: für die richtige Beschreibung des Ausdrucks im gegebenen Sachzusammenhang (KB)

Aufgabe 7 (Teil B)

Wohnungen

Möglicher Lösungsweg

a) Lösung mittels Technologieeinsatz:
$M(t) = 0{,}32 \cdot t + 7{,}69$ (Koeffizienten gerundet)

Die Mietpreise pro m² sind im angegebenen Zeitraum um durchschnittlich rund € 0,32 pro Jahr angestiegen.

$M(15) = 12{,}454... \approx 12{,}45$
Gemäß diesem Modell beträgt der Mietpreis pro m² am Ende des Jahres 2018 rund € 12,45.

Der Änderungsfaktor 1,035 gibt an, dass die Mietpreise pro m² jährlich um 3,5 % steigen.

b) Der Ausdruck (1) gibt die durchschnittliche Anzahl der Personen pro Wohnung (rund 2,18) an.
Der Ausdruck (2) gibt die durchschnittliche Anzahl der Wohnräume pro Wohnung (rund 3,98) an.

c) $\frac{3362}{1{,}054 \cdot 1{,}067 \cdot 1{,}071} = 2791{,}2... \approx 2791$
Der durchschnittliche Preis pro m² für eine Eigentumswohnung mit gutem Wohnwert lag am Ende des Jahres 2010 bei rund € 2.791.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln einer Gleichung der Regressionsfunktion (KA)
1 × C1: für die richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang (KB)
1 × B2: für das richtige Ermitteln der Prognose für das Ende des Jahres 2018 (KB)
1 × C2: für die richtige Interpretation des Werts 1,035 im gegebenen Sachzusammenhang (KA)

b) 1 × C1: für die richtige Beschreibung von Ausdruck (1) im gegebenen Sachzusammenhang (KA)
1 × C2: für die richtige Beschreibung von Ausdruck (2) im gegebenen Sachzusammenhang (KA)

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Preises pro m² am Ende des Jahres 2010 (KA)

Aufgabe 8 (Teil B)

Grenzkosten und Grenzerlös

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{K(25) - K(20)}{25 - 20} = \frac{123{,}75 - 116}{5} = \frac{7{,}75}{5} = 1{,}55$

Die mittlere Änderungsrate von K im Intervall [20 ME; 25 ME] beträgt 1,55 GE/ME.

$K'(x) = 0{,}003 \cdot x^2 - 0{,}23 \cdot x + 5{,}2$

$K'(20) = 1{,}8$

Die Grenzkosten bei einer Produktion von 20 ME betragen 1,8 GE/ME.

Bei einer Produktionsmenge von 20 ME führt eine Steigerung der Produktion um 1 ME zu einer Kostensteigerung von näherungsweise 1,8 GE.

b) $\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = 2 \cdot a \cdot x + b - \frac{d}{x^2}$

c) $E'(x) = -\frac{8}{50} \cdot x + 8$

$E'(20) = 4{,}8$

$A = \frac{(8 + 4{,}8) \cdot 20}{2} = 128$

Bei 20 abgesetzten ME beträgt der Erlös 128 GE.
Bei 50 abgesetzten ME ist der Erlös maximal.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der mittleren Änderungsrate (KA)
1 × B2: für die richtige Berechnung der Grenzkosten (KA)
1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang (KB)

b) 1 × B: für das Richtigstellen der Berechnung der Ableitungsfunktion (KA)

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Grenzerlösfunktion (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts (KB)
1 × C1: für die richtige Interpretation des Inhalts der markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang mit Angabe der Einheit (KB)
1 × C2: für die richtige Interpretation der Nullstelle von E' in Bezug auf die Erlösfunktion E im gegebenen Sachzusammenhang (KA)

Aufgabe 9 (Teil B)

Buntes Spielzeug

Möglicher Lösungsweg

a) E ... zweifärbiger Spielzeugteil in den Farben Rot und Blau besteht die Kontrolle

$P(E) = 0{,}968 \cdot 0{,}972 = 0{,}9408...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 94,1 %.

$\overline{E}$ steht in diesem Sachzusammenhang für das Ereignis, dass ein zweifärbiges Spielzeugteil in den Farben Rot und Gelb die Kontrolle nicht besteht.

b) Median der Längen der gelben Spielzeugteile: $\tilde{x} = 5{,}5$ cm

$$\overline{x}_{\text{rot}} = \frac{20 \cdot 4{,}5\text{ cm} + 10 \cdot 5{,}6\text{ cm} + 20 \cdot 6{,}0\text{ cm} + 15 \cdot 6{,}5\text{ cm} + 5 \cdot 25{,}3\text{ cm}}{70} = 7{,}0\text{ cm}$$

$\overline{x}_{\text{blau}} = 7{,}0$ cm

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit (KA)
1 × C: für die richtige Beschreibung des Ereignisses im gegebenen Sachzusammenhang (KA)

b) 1 × C: für das richtige Ermitteln des Medians (KA)
1 × D: für den richtigen Nachweis (KA)

Aufgabe 10 (Teil B)

Pensionsvorsorge

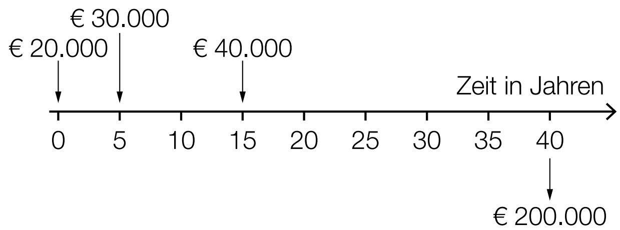
Möglicher Lösungsweg

a) $400 \cdot 1{,}0027 \cdot \frac{1{,}0027^{180} - 1}{0{,}0027} = 92\,803{,}312...$

$92\,803{,}312... \cdot 1{,}0027^{300} = 208\,385{,}722...$

Sein privater Pensionsbetrag beträgt nach 40 Jahren rund € 208.385,72.

b)



$200\,000 = 20\,000 \cdot (1 + i)^{40} + 30\,000 \cdot (1 + i)^{35} + 40\,000 \cdot (1 + i)^{25}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$i = 0{,}02514...$

Der zugehörige Jahreszinssatz beträgt rund 2,51 % p. a.

c) $200\,000 = 12\,000 \cdot \frac{1{,}02^{n} - 1}{0{,}02} \cdot \frac{1}{1{,}02^{n}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$n = 20{,}4...$

Er könnte 20-mal den vollen Betrag in Höhe von € 12.000 abheben.

Bei Variante 2 bleibt das angesparte Kapital erhalten, weil der Betrag, den er am Ende jedes Jahres abhebt, genau den anfallenden Zinsen entspricht.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Pensionsbeitrags nach 40 Jahren (KA)
b) 1 × A: für das richtige Darstellen auf einer Zeitachse (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung des Jahreszinssatzes (KB)
c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Anzahl der Vollraten (KA)
1 × D: für die richtige Erklärung (KA)