Name:	
Klasse:	

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

28. September 2017

Mathematik

Teil-2-Aufgaben

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Aufgabenbearbeitung

Sehr geehrte Kandidatin! Sehr geehrter Kandidat!

Das vorliegende Aufgabenheft zu Teil 2 enthält vier Aufgaben mit je zwei bis vier Teilaufgaben, wobei alle Teilaufgaben unabhängig voneinander bearbeitbar sind. Ihnen stehen dafür insgesamt *150 Minuten* an reiner Arbeitszeit zur Verfügung.

Verwenden Sie einen nicht radierbaren, blau oder schwarz schreibenden Stift! Bei Konstruktionsaufgaben ist auch die Verwendung eines Bleistifts möglich.

Verwenden Sie zur Bearbeitung dieser Aufgaben dieses Aufgabenheft und die Ihnen zur Verfügung gestellten Blätter! Schreiben Sie Ihren Namen auf der ersten Seite des Aufgabenheftes in das dafür vorgesehene Feld und auf jedes verwendete Blatt! Geben Sie bei der Beantwortung jeder Teilaufgabe deren Bezeichnung an!

In die Beurteilung wird alles einbezogen, was nicht durchgestrichen ist. Die Lösung muss dabei klar ersichtlich sein. Wenn die Lösung nicht klar ersichtlich ist oder verschiedene Lösungen angegeben sind, gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Streichen Sie Ihre Notizen durch.

Sie dürfen eine approbierte Formelsammlung sowie die gewohnten elektronischen Hilfsmittel verwenden.

Abzugeben sind das Aufgabenheft und alle von Ihnen verwendeten Blätter.

Beurteilung

Jede Aufgabe in Teil 1 wird mit 0 Punkten oder 1 Punkt bewertet, jede Teilaufgabe in Teil 2 mit 0, 1 oder 2 Punkten. Die mit $\boxed{\text{A}}$ gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden mit 0 Punkten oder 1 Punkt bewertet.

- Werden im Teil 1 mindestens 16 von 24 Aufgaben richtig gelöst, wird die Arbeit positiv bewertet.
- Werden im Teil 1 weniger als 16 von 24 Aufgaben richtig gelöst, werden mit $\boxed{\text{A}}$ markierte Aufgabenstellungen aus Teil 2 zum Ausgleich (für den laut LBVO „wesentlichen Bereich“) herangezogen.
  Werden unter Berücksichtigung der mit $\boxed{\text{A}}$ markierten Aufgabenstellungen aus Teil 2 mindestens 16 Aufgaben richtig gelöst, wird die Arbeit positiv bewertet.
  Werden auch unter Berücksichtigung der mit $\boxed{\text{A}}$ markierten Aufgabenstellungen aus Teil 2 weniger als 16 Aufgaben richtig gelöst, wird die Arbeit mit „Nicht genügend“ beurteilt.
- Werden im Teil 1 mindestens 16 Punkte (mit Berücksichtigung der Ausgleichspunkte $\boxed{\text{A}}$) erreicht, so gilt folgender Beurteilungsschlüssel:

Genügend	16–23 Punkte
Befriedigend	24–32 Punkte
Gut	33–40 Punkte
Sehr gut	41–48 Punkte

Erläuterung der Antwortformate

Die Aufgaben haben einerseits ***freie Antwortformate***; dabei schreiben Sie Ihre Antwort direkt unter die jeweilige Aufgabenstellung in das Aufgabenheft oder auf die zur Verfügung gestellten Blätter. Weitere Antwortformate, die in der Klausur zum Einsatz kommen können, werden im Folgenden vorgestellt:

Zuordnungsformat: Dieses Antwortformat ist durch mehrere Aussagen (bzw. Tabellen oder Abbildungen) gekennzeichnet, denen mehrere Antwortmöglichkeiten gegenüberstehen. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die Antwortmöglichkeiten durch Eintragen der **entsprechenden Buchstaben** den jeweils zutreffenden Aussagen zuordnen!

Beispiel:
Gegeben sind zwei Gleichungen.

Aufgabenstellung:
Ordnen Sie den zwei Gleichungen jeweils die entsprechende Bezeichnung (aus A bis D) zu!

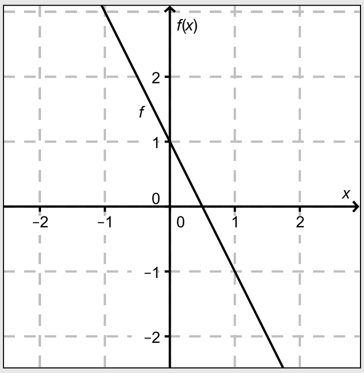
$1 + 1 = 2$	A
$2 \cdot 2 = 4$	C

A	Addition
B	Division
C	Multiplikation
D	Subtraktion

Konstruktionsformat: Eine Aufgabe und deren Aufgabenstellung sind vorgegeben. Die Aufgabe erfordert die Ergänzung von Punkten, Geraden und/oder Kurven im Aufgabenheft.

Beispiel:
Gegeben ist eine lineare Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$.

Aufgabenstellung:
Zeichnen Sie den Graphen einer linearen Funktion mit den Bedingungen $k = -2$ und $d > 0$ in das vorgegebene Koordinatensystem ein!



Multiple-Choice-Format in der Variante „1 aus 6“: Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und sechs Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei **eine Antwortmöglichkeit** auszuwählen ist. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die einzige zutreffende Antwortmöglichkeit ankreuzen!

Beispiel:
Welche Gleichung ist korrekt?

Aufgabenstellung:
Kreuzen Sie die zutreffende Gleichung an!

1 + 1 = 1	☐
2 + 2 = 2	☐
3 + 3 = 3	☐
4 + 4 = 8	☒
5 + 5 = 5	☐
6 + 6 = 6	☐

Multiple-Choice-Format in der Variante „2 aus 5“: Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und fünf Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei **zwei Antwortmöglichkeiten** auszuwählen sind. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die beiden zutreffenden Antwortmöglichkeiten ankreuzen!

Beispiel:
Welche Gleichungen sind korrekt?

Aufgabenstellung:
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an!

1 + 1 = 1	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 3	☐
4 + 4 = 8	☒
5 + 5 = 5	☐

Multiple-Choice-Format in der Variante „x aus 5“: Dieses Antwortformat ist durch einen Fragenstamm und fünf Antwortmöglichkeiten gekennzeichnet, wobei **eine, zwei, drei, vier** *oder* **fünf Antwortmöglichkeiten** auszuwählen sind. In der Aufgabenstellung finden Sie stets die Aufforderung „Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n)/ Gleichung(en)/... an!“. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die zutreffende Antwortmöglichkeit/die zutreffenden Antwortmöglichkeiten ankreuzen!

Beispiel:
Welche der gegebenen Gleichungen ist/sind korrekt?

Aufgabenstellung:
Kreuzen Sie die zutreffende(n) Gleichung(en) an!

1 + 1 = 2	☒
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 6	☒
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 10	☒

Lückentext: Dieses Antwortformat ist durch einen Satz mit zwei Lücken gekennzeichnet, das heißt, im Aufgabentext sind zwei Stellen ausgewiesen, die ergänzt werden müssen. Für jede Lücke werden je drei Antwortmöglichkeiten vorgegeben. Bearbeiten Sie Aufgaben dieses Formats korrekt, indem Sie die Lücken durch Ankreuzen der **beiden zutreffenden Antwortmöglichkeiten** füllen!

Beispiel:
Gegeben sind 3 Gleichungen.

Aufgabenstellung:
Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Die Gleichung _____①_____ wird als Zusammenzählung oder _____②_____ bezeichnet.

①	
1 – 1 = 0	☐
1 + 1 = 2	☒
1 · 1 = 1	☐

②	
Multiplikation	☐
Subtraktion	☐
Addition	☒

So ändern Sie Ihre Antwort bei Aufgaben zum Ankreuzen:

1. Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
2. Kreuzen Sie dann das gewünschte Kästchen an.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	■

Hier wurde zuerst die Antwort „5 + 5 = 9“ gewählt und dann auf „2 + 2 = 4“ geändert.

So wählen Sie eine bereits übermalte Antwort:

1. Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
2. Kreisen Sie das gewünschte übermalte Kästchen ein.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	■
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	■
5 + 5 = 9	☐

Hier wurde zuerst die Antwort „2 + 2 = 4“ übermalt und dann wieder gewählt.

Wenn Sie jetzt noch Fragen haben, wenden Sie sich bitte an Ihre Lehrerin / Ihren Lehrer!

Viel Erfolg bei der Bearbeitung!

Aufgabe 1

Aktivität und Altersbestimmung

Beim Zerfall eines radioaktiven Stoffes nimmt die Anzahl der noch nicht zerfallenen Atomkerne exponentiell ab und lässt sich näherungsweise durch eine Funktion N mit $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ beschreiben. Dabei ist N_0 die Anzahl der Atomkerne zum Zeitpunkt $t = 0$, $N(t)$ die Anzahl der noch nicht zerfallenen Atomkerne zum Zeitpunkt $t \geq 0$ und λ die sogenannte Zerfallskonstante.

Die Aktivität $A(t)$ ist der Absolutbetrag der momentanen Änderungsrate der Funktion N zum Zeitpunkt t. Sie wird in Becquerel (Bq) gemessen. Eine Aktivität von 1 Bq entspricht einem radioaktiven Zerfall pro Sekunde.

Bei radioaktiven Stoffen nimmt die Aktivität ebenfalls exponentiell ab und kann durch eine Funktion A mit $A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ modelliert werden. Dabei ist A_0 die Aktivität zum Zeitpunkt $t = 0$ und $A(t)$ die Aktivität zum Zeitpunkt $t \geq 0$.

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie eine Formel an, mit der die Anzahl der Atomkerne N_0 aus der gemessenen Aktivität A_0 berechnet werden kann!

   Eine Probe von ^{238}U (Uran-238) hat zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Aktivität von 17 Bq. Die Zerfallskonstante von ^{238}U hat den Wert $\lambda \approx 4{,}92 \cdot 10^{-18}$ pro Sekunde.
   Bestimmen Sie die Anzahl der ^{238}U-Atomkerne zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Probe!

b) Mithilfe des Anteils des in einer Probe enthaltenen Kohlenstoffisotops ^{14}C kann das Alter der Probe ermittelt werden. Durch den Stoffwechsel hat sich zwischen der Bildung und dem radioaktiven Zerfall des Isotops sowohl in der Atmosphäre als auch in lebenden Organismen eine Gleichgewichtskonzentration von ^{14}C bzw. eine Aktivität von ca. 0,267 Bq pro Gramm Kohlenstoff eingestellt. Mit dem Absterben eines Organismus (z. B. eines Baumes) endet die Aufnahme von ^{14}C. Der ^{14}C-Anteil nimmt ab diesem Zeitpunkt exponentiell (mit der Zerfallskonstante $\lambda \approx 1{,}21 \cdot 10^{-4}$ pro Jahr) ab und damit nimmt auch die Aktivität exponentiell ab.

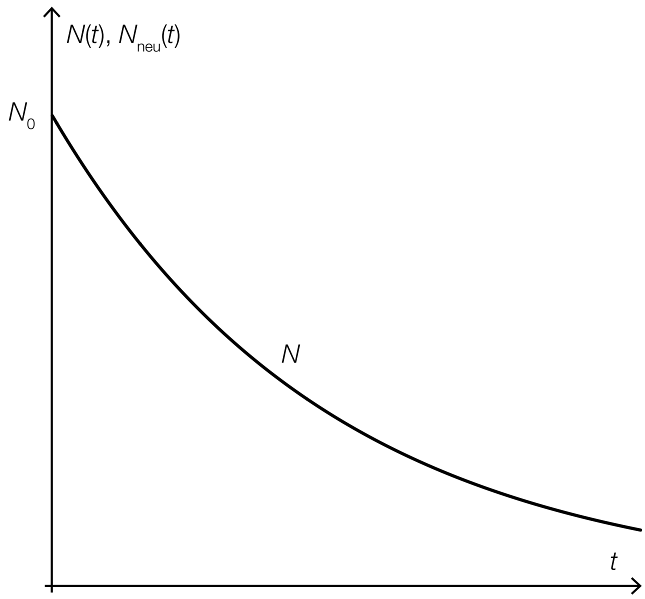
   Ein Fundstück aus Holz hat einen Kohlenstoffanteil von 25 Gramm und eine Aktivität von ca. 4 Bq. Geben Sie an, vor wie vielen Jahren dieses Holz abgestorben ist!

   Geben Sie an, ob zum Zeitpunkt des Fundes mehr oder weniger als die Hälfte der ursprünglich vorhandenen ^{14}C-Atomkerne zerfallen ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

c) Die Funktion N kann auch in der Form $N(t) = N_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{c}}$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ angegeben werden.

$\boxed{\text{A}}$ Geben Sie an, welcher Zusammenhang zwischen der Konstanten c und der Halbwertszeit τ eines radioaktiven Stoffes besteht!

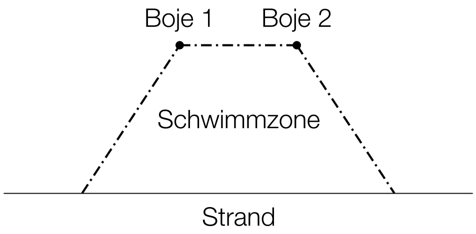
In der unten stehenden Abbildung ist der Graph einer Funktion N mit $N(t) = N_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{c}}$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ dargestellt.
Zeichnen Sie den Verlauf des Graphen einer Funktion N_{neu} mit $N_{neu}(t) = N_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{c_{neu}}}$ mit $c_{neu} \in \mathbb{R}^+$ in diese Abbildung ein, wenn $c_{neu} < c$ gelten soll!



Aufgabe 2

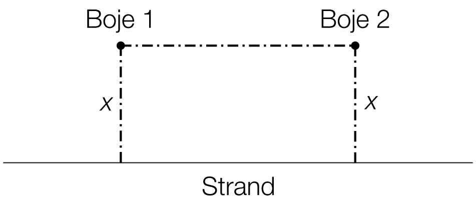
Schwimmzonen

Wegen der großen Anzahl an Motorbooten, Jetskis etc. hat man an einigen Stränden spezielle Schwimmzonen eingerichtet.
Alle in dieser Aufgabe beschriebenen Schwimmzonen sind mit je zwei Bojen und einem 180 Meter langem Seil an einem nahezu geraden Strand angelegt.



Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist eine rechteckige Schwimmzone (x in Metern).



$\boxed{A}$ Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt $A(x)$ einer derartigen Schwimmzone die Gleichung $A(x) = 180 \cdot x - 2 \cdot x^2$ gilt!

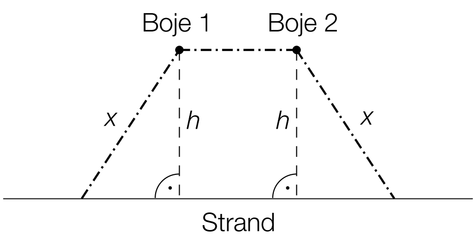
Ermitteln Sie die Länge, die Breite und den Flächeninhalt derjenigen Schwimmzone, die den größten Flächeninhalt aufweist!

Länge = ______________________________ m

Breite = ______________________________ m

Flächeninhalt = ______________________________ m²

b) Gegeben sind trapezförmige Schwimmzonen (x und h in Metern).

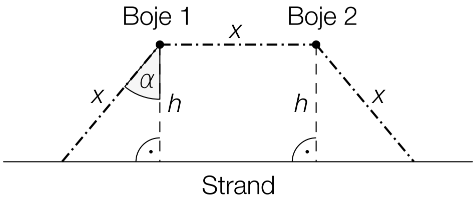


Um den Flächeninhalt einer solchen trapezförmigen Schwimmzone berechnen zu können, kann die Formel $A(x, h) = h \cdot \left(180 - 2 \cdot x + \sqrt{x^2 - h^2}\right)$ herangezogen werden.

Geben Sie alle Werte an, die x annehmen darf, wenn h 40 m lang ist!

Geben Sie alle Werte an, die h annehmen darf, wenn x 50 m lang ist!

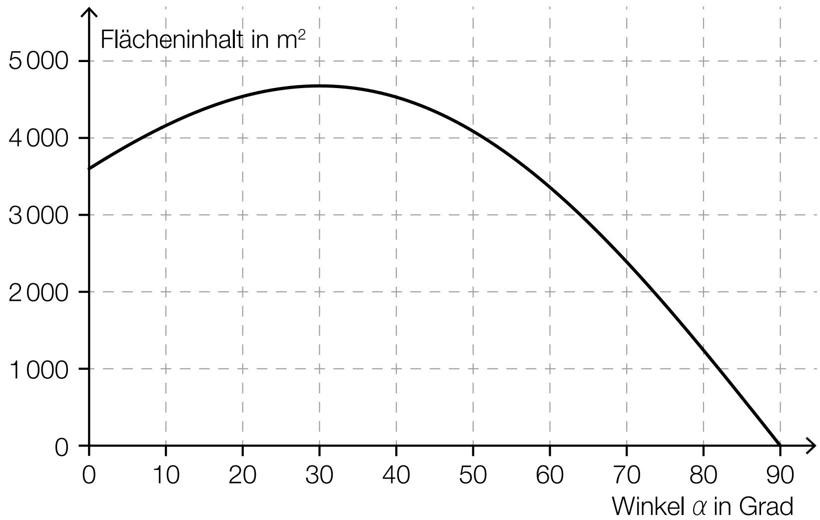
c) Gegeben sind trapezförmige Schwimmzonen, bei denen alle drei Seilabschnitte gleich lang sind (x und h in Metern).



Der Flächeninhalt $A(\alpha)$ einer derartigen Schwimmzone kann in Abhängigkeit vom Winkel α beschrieben werden ($A(\alpha)$ in m², α in Grad).
Stellen Sie eine Formel auf, mit deren Hilfe der Flächeninhalt einer solchen Schwimmzone in Abhängigkeit vom Winkel α berechnet werden kann!

$A(\alpha) =$ ____

In der nachstehenden Abbildung sind die Werte der Flächeninhalte für den jeweiligen Winkel α dargestellt.



Es soll eine Schwimmzone mit größtmöglichem Flächeninhalt angelegt werden. Berechnen Sie unter Zuhilfenahme der obigen Abbildung diejenige Länge, die sich dabei für den Strandabschnitt, von dem aus man die Schwimmzone betreten kann, ergibt!

Aufgabe 3

Brasilien

Brasilien ist der größte und bevölkerungsreichste Staat Südamerikas.

Im Jahr 2014 hatte Brasilien eine Einwohnerzahl von 202,74 Millionen.

Aufgrund von Volkszählungen sind folgende Einwohnerzahlen bekannt:

Jahr	Einwohnerzahl
1970	94 508 583
1980	121 150 573
1991	146 917 459
2000	169 590 693
2010	190 755 799

Aufgabenstellung:

a) $\boxed{\text{A}}$ Geben Sie die Bedeutung der nachstehend angeführten Werte im Kontext der Entwicklung der Einwohnerzahl an!

$$\sqrt[10]{\frac{121\,150\,573}{94\,508\,583}} \approx 1{,}02515$$

$$\sqrt[9]{\frac{169\,590\,693}{146\,917\,459}} \approx 1{,}01607$$

Begründen Sie anhand der beiden angeführten Werte, warum man die Entwicklung der Einwohnerzahl im gesamten Zeitraum von 1970 bis 2010 nicht angemessen durch eine Exponentialfunktion beschreiben kann!

b) Geben Sie unter Annahme eines linearen Wachstums anhand der Einwohnerzahlen von 1991 und 2010 eine Gleichung derjenigen Funktion f an, die die Einwohnerzahl beschreibt! Die Zeit t wird dabei in Jahren gemessen, der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Jahr 1991.

Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Vorhersage des linearen Modells für das Jahr 2014 von dem in der Einleitung angegebenen tatsächlichen Wert abweicht!

c) Für Brasilien wird für die Jahre 2010 bis 2015 jeweils eine konstante Geburtenrate $b = 14{,}6$ sowie eine konstante Sterberate $d = 6{,}6$ angenommen. Das bedeutet, dass es jährlich 14,6 Geburten pro 1 000 Einwohner/innen und 6,6 Todesfälle pro 1 000 Einwohner/innen gibt.

Die Entwicklung der Einwohnerzahl kann in diesem Zeitraum mithilfe der Differenzengleichung $x_{n+1} = x_n + x_n \cdot \frac{1}{1000} \cdot (b - d) + m_n$ beschrieben werden, wobei x_n die Anzahl der Einwohner/innen im Jahr n beschreibt und m_n die Differenz aus der Anzahl der zugewanderten und jener der abgewanderten Personen angibt. Diese Differenz wird als Wanderungsbilanz bezeichnet.

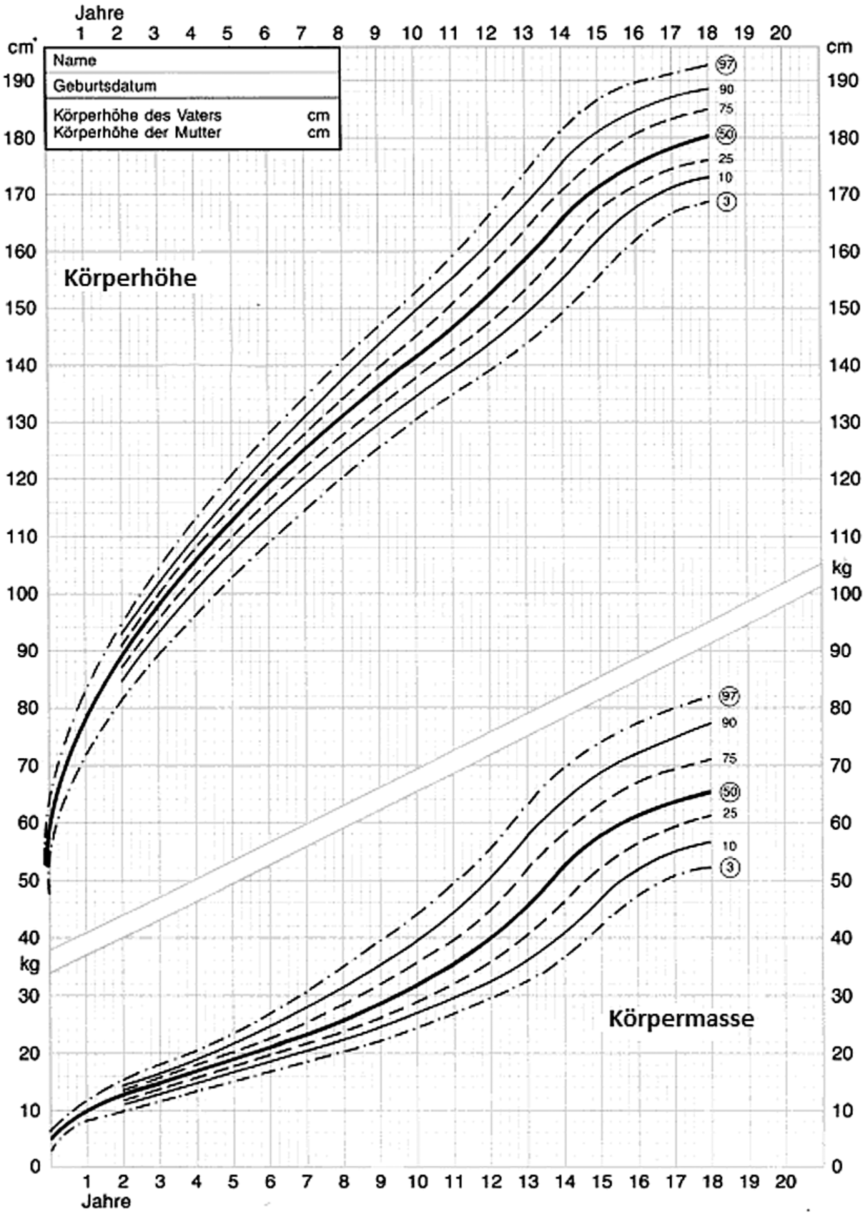
Geben Sie die Bedeutung des Ausdrucks $x_n \cdot \frac{1}{1000} \cdot (b - d)$ im Kontext der Entwicklung der Einwohnerzahl an!

Berechnen Sie die maximale Größe der Wanderungsbilanz für den Fall, dass die Einwohnerzahl im Jahr 2015 gegenüber der Einwohnerzahl des Vorjahres maximal um 1 % größer ist!

Aufgabe 4

Wachstumskurve von Kindern

Um die Entwicklung der Körperhöhe und der Masse eines Kindes kontrollieren zu können, sind im Mutter-Kind-Pass die Perzentilenkurven für Körperhöhe (Größe) und Masse angegeben (Körperhöhe in cm, Masse in kg). Perzentile teilen die Körperhöhen und Massen der Kinder in Prozent-Bereiche auf. Liegt ein Wert auf dem 10. Wachstumsperzentil, so sind 10 % der Kinder des ausgewählten Alters kleiner oder gleich dem angegebenen Wert und 90 % größer oder gleich dem angegebenen Wert.
Es ist üblich, alle Werte zwischen dem 3. und dem 97. Perzentil als „normal" zu bezeichnen.
Das folgende Diagramm zeigt die Wachstums- und Körpermassekurven für Buben im Alter von 0 bis 18 Jahren:



Quelle: http://www.grosswuchs.de/WachstumTabelleJ.htm [21.05.2014].

Aufgabenstellung:

a) Ein Schularzt untersucht eine zufällige Stichprobe von 8-jährigen Buben aus seinem Schulbezirk und erhebt unter anderem deren Körpermassen (in kg). Anhand der Ergebnisse dieser Messung erstellt er für den Anteil der 8-jährigen Buben aus seinem Schulbezirk, deren Körpermasse im „Normalbereich" [20 kg; 35 kg] liegt, das symmetrische Konfidenzintervall [0,8535; 0,9465] mit dem Konfidenzniveau $\gamma = 0{,}95$.

   Geben Sie den Unterschied des der Berechnung zugrundeliegenden Stichprobenanteils zum Anteil der 8-jährigen Buben mit einer Körpermasse im „Normalbereich" laut Diagramm in Prozentpunkten an!

   Berechnen Sie die Anzahl der bei dieser Stichprobe gemessenen 8-jährigen Buben!

b) Angenommen, für ein bestimmtes Kind sind die Körperhöhen $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, ... zum ersten, zweiten, dritten usw. Geburtstag bekannt.
   Geben Sie verbal oder als Formel an, wie sich die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit dieses Kindes in dem dreijährigen Zeitraum zwischen dem 6. und dem 9. Geburtstag bestimmen lässt!

   Betrachten Sie das Größenwachstum auf dem 50. Perzentil nach dem 8. Lebensjahr.
   Geben Sie das ungefähre Alter von Buben an, bei dem deren momentane Wachstumsgeschwindigkeit am größten ist!

c) $\boxed{\text{A}}$ Geben Sie an, welcher statistischen Kennzahl derjenige Wert entspricht, den man auf dem 50. Perzentil ablesen kann!

   Erläutern Sie, welche Schwierigkeiten auftreten, wenn man aus dem angegebenen Diagramm ein Kastenschaubild (Boxplot) zur Darstellung der Körperhöhen von 8-jährigen Buben erstellen möchte!