Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Oktober 2017

Mathematik

Kompensationsprüfung 2
Angabe für **Prüfer/innen**

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung" muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage" ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend"	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend"	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut"	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

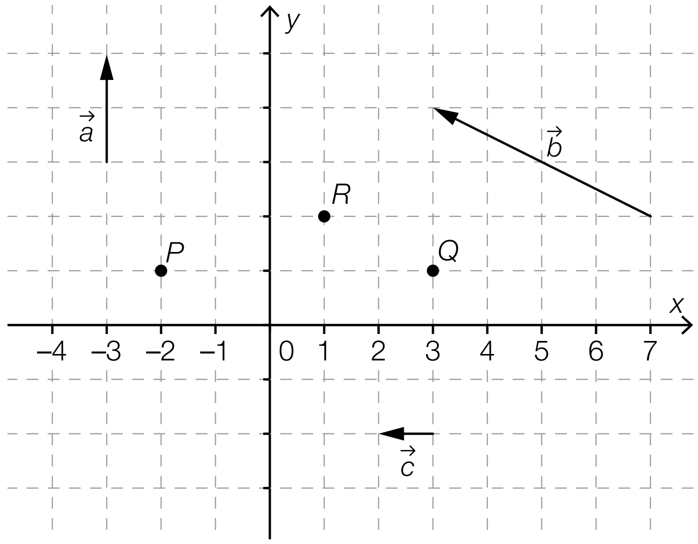
Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Punkte und Vektoren

Im nachstehenden Koordinatensystem sind drei Punkte mit jeweils ganzzahligen Koordinaten und drei Vektoren mit jeweils ganzzahligen Komponenten eingezeichnet.



Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche der nachstehenden Aussagen wahr ist/sind!

- Es gibt ein $t \in \mathbb{R}$, sodass gilt: $Q = P + t \cdot \vec{c}$.
- Es gibt ein $t \in \mathbb{R}$, sodass gilt: $P = R + t \cdot \vec{a}$.
- Es gibt ein $t \in \mathbb{R}$, sodass gilt: $R = Q + t \cdot \vec{b}$.

Begründen Sie Ihre Entscheidungen und berechnen Sie gegebenenfalls den entsprechenden Parameterwert!

Leitfrage:

Erläutern Sie allgemein, warum nicht jede Gerade als Graph einer linearen Funktion f mit $f: x \mapsto y$ aufgefasst werden kann!

Geben Sie sowohl eine Parameterdarstellung als auch eine parameterfreie Gleichung derjenigen Geraden g an, die durch den Punkt P verläuft, einen der drei eingezeichneten Vektoren als Richtungsvektor hat und nicht als Graph einer linearen Funktion g mit $g: x \mapsto y$ aufgefasst werden kann!

Lösung zur Aufgabe 1

Punkte und Vektoren

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Vorgehensweise:

$Q = P + t \cdot \vec{c}$ Der Parameter t kann so gewählt werden, dass der Ausdruck eine wahre Aussage liefert. Addiert man zu P den 5-fachen Gegenvektor von $\vec{c}$, so erhält man Q.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow t = -5$$

$P = R + t \cdot \vec{a}$ Es gibt kein t, sodass der Ausdruck eine wahre Aussage liefert. Addiert man zu R Vielfache von $\vec{a}$, so kann man dadurch alle Punkte auf der Geraden $x = 1$ erzeugen. Diese enthält nicht den Punkt P.

Der Ansatz $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ führt zur unlösbaren Gleichung $-2 = 1 + 0 \cdot t$.

$R = Q + t \cdot \vec{b}$ Der Parameter t kann so gewählt werden, dass der Ausdruck eine wahre Aussage liefert. Addiert man zu Q den Vektor von $\frac{1}{2} \cdot \vec{b}$, so erhält man R.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn für jeden der drei Ausdrücke korrekt angegeben und begründet wird, ob ein passender Parameterwert existiert oder nicht existiert, und dieser gegebenenfalls richtig berechnet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Geraden, die parallel zur y-Achse verlaufen, können nicht als Graph einer linearen Funktion f mit $f: x \mapsto y$ aufgefasst werden, da Geraden dieser Art Zuordnungen beschreiben, bei denen einem x-Wert mehrere (unendlich viele) y-Werte zugeordnet werden. Funktionen beschreiben hingegen eindeutige Zuordnungen, bei denen jedem x-Wert aus dem Definitionsbereich genau ein y-Wert aus dem Wertebereich zugeordnet wird.

$g: X = P + t \cdot \vec{a}$ mit $t \in \mathbb{R}$

$g: X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

$g: x = -2$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn (sinngemäß) korrekt erläutert wird, warum Geraden, die parallel zur y-Achse verlaufen, nicht als Graph einer linearen Funktion aufgefasst werden können, und beide Formen der Geraden g korrekt angegeben werden.
Äquivalente Darstellungen sind als richtig zu werten.

Aufgabe 2

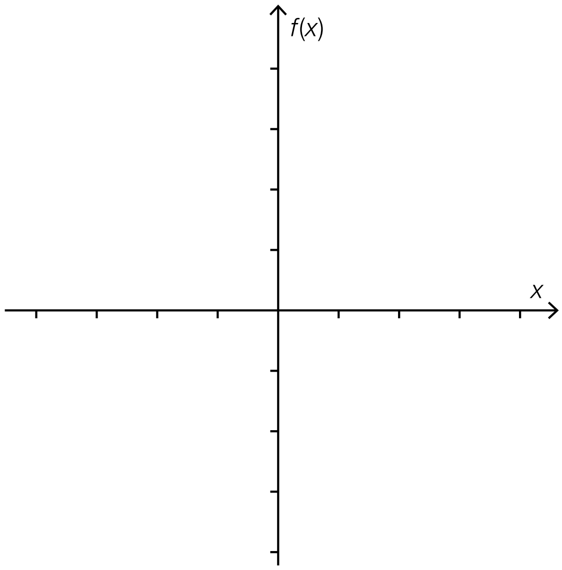
Polynomfunktionen

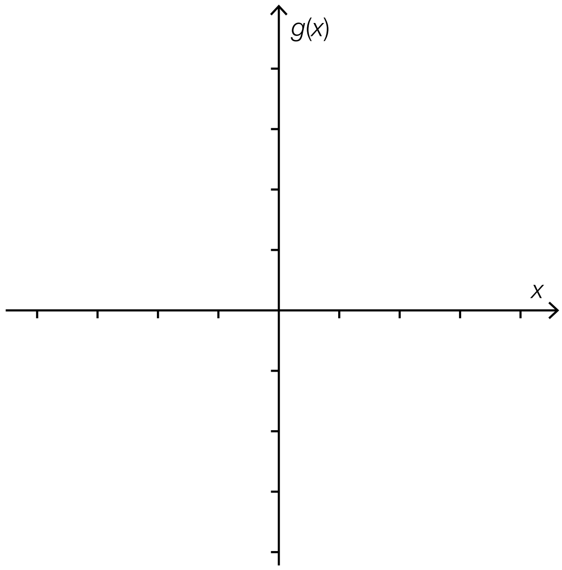
Für die Polynomfunktionen f und g gilt:

- f hat genau zwei Nullstellen, genau drei lokale Extremstellen und genau zwei Wendestellen.
- g hat genau eine Nullstelle, keine lokale Extremstelle und genau eine Wendestelle.

Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie in den nachstehenden Koordinatensystemen jeweils einen möglichen Graphen der Funktionen f und g so, dass die genannten Eigenschaften ersichtlich sind, und markieren Sie alle Wendepunkte!





Leitfrage:

Geben Sie jeweils den kleinstmöglichen Grad n_f bzw. n_g der Polynomfunktionen f und g an, sodass die oben genannten Eigenschaften erfüllt sind, und begründen Sie Ihre Aussage!

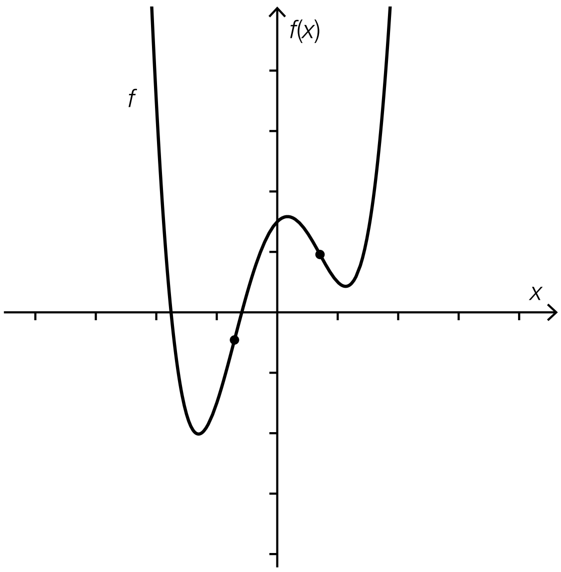
Geben Sie an, ob die Funktion g auch vom Grad $n_g + 1$ sein kann, und begründen Sie Ihre Aussage!

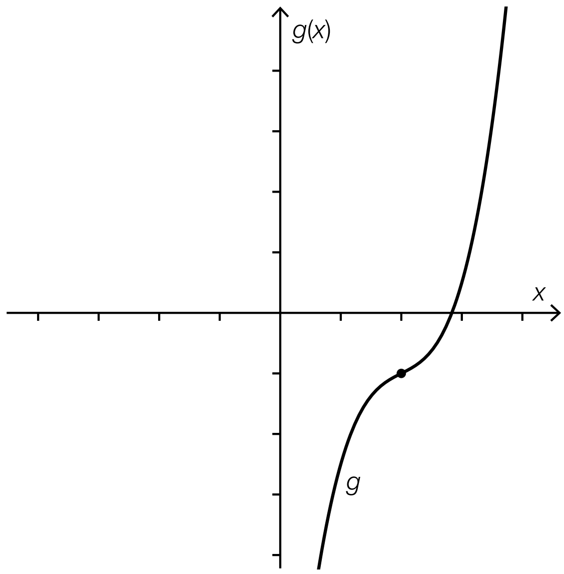
Lösung zur Aufgabe 2

Polynomfunktionen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Mögliche Graphen für *f* und *g*:





Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die beiden skizzierten Graphen die angegebenen Eigenschaften aufweisen und die Wendepunkte korrekt markiert werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Eine Polynomfunktion vom Grad n kann höchstens n Nullstellen, höchstens $n - 1$ lokale Extremstellen und höchstens $n - 2$ Wendestellen haben.

Da f zwei Wendestellen hat, muss f mindestens den Grad vier haben.
Da g eine Wendestelle hat, muss g mindestens den Grad drei haben.

Der Grad vier kommt für g nicht in Frage, da eine Polynomfunktion vom Grad vier mindestens eine lokale Extremstelle hat.

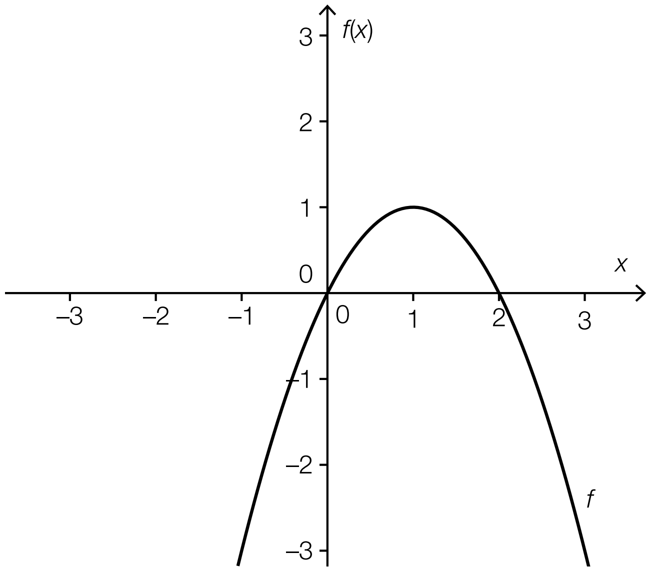
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der minimale Grad beider Funktionen korrekt angegeben und begründet wird sowie eine (sinngemäß) korrekte Begründung angegeben wird, warum der Grad vier für g nicht in Frage kommt.

Aufgabe 3

Bestimmtes Integral

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f mit $f(x) = -x^2 + 2 \cdot x$.



Aufgabenstellung:

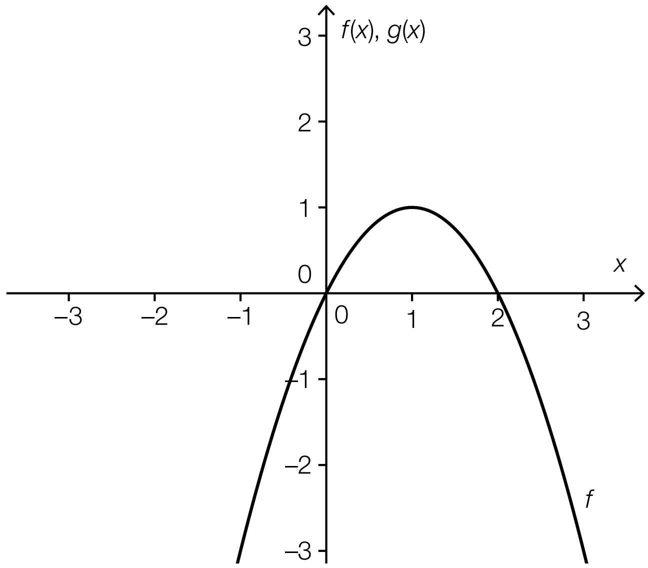
Geben Sie einen Term zur Berechnung des Inhalts derjenigen Fläche an, die vom Graphen der Funktion f und der x-Achse begrenzt wird, und berechnen Sie diesen!

Leitfrage:

Ergänzen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Funktion g mit $g(x) = 2 \cdot x - 1$!

Für $a = \sqrt{3}$ gilt: $\int_0^a [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = 0$.

Erläutern Sie den durch diese Gleichung beschriebenen Sachverhalt mithilfe der nachstehenden Abbildung!



Erläutern Sie, wie sich eine Vergrößerung von a auf den Wert des angegebenen bestimmten Integrals auswirkt!

Lösung zur Aufgabe 3

Bestimmtes Integral

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

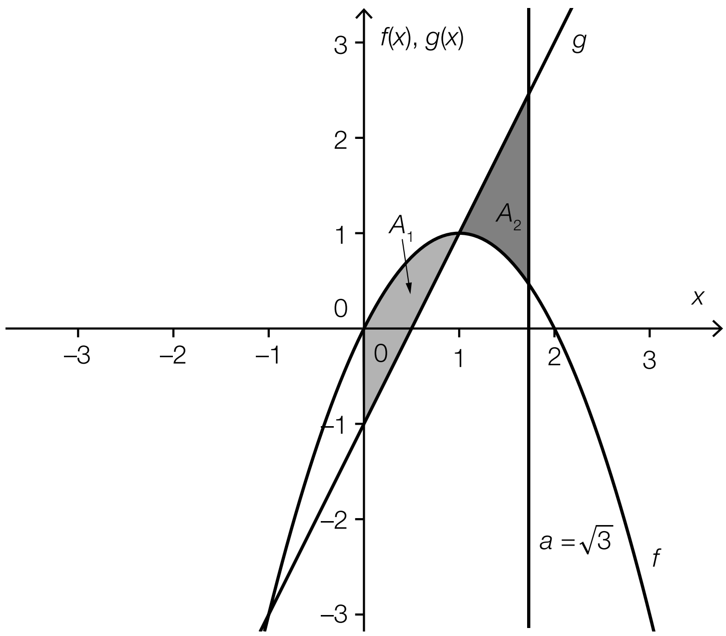
$\int_0^2 (-x^2 + 2 \cdot x)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$

Der Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f und der x-Achse begrenzt wird, beträgt $\frac{4}{3}$ Flächeneinheiten.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein korrekter Term angegeben und der gesuchte Flächeninhalt richtig berechnet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:



Die beiden Funktionsgraphen begrenzen im Intervall $[0; \sqrt{3}]$ zwei gleich große Flächen A_1 und A_2, die sich „gegenseitig aufheben", weil der Graph von g einmal unterhalb, dann oberhalb des Graphen von f verläuft.

Eine weitere Vergrößerung von a bewirkt eine Vergrößerung von A_2, sodass das bestimmte Integral kleiner und damit negativ wird.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Graph von g korrekt eingezeichnet und der Sachverhalt erläutert sowie die Auswirkung einer Vergrößerung von a (sinngemäß) korrekt erläutert wird.

Aufgabe 4

Außentemperatur

Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ wird die Außentemperatur T gemessen.
Dabei gibt $T(t)$ die Außentemperatur in °C nach t Stunden an.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche beiden der nachstehenden Interpretationen sich aus der Gleichung $\frac{T(5) - T(0)}{5} = -2$ korrekt schlussfolgern lassen, und begründen Sie Ihre Antwort!

1	Zum Zeitpunkt $t = 5$ ist es um 10 °C kälter als zum Zeitpunkt $t = 0$.
2	Die momentane Änderungsrate der Temperatur beträgt zu jedem Zeitpunkt –2 °C pro Stunde.
3	Die Temperatur nimmt im Zeitintervall [0; 5] um durchschnittlich 2 °C pro Stunde ab.
4	Die Temperatur nimmt im Zeitintervall [0; 5] pro Stunde um exakt 2 °C ab.
5	Die Durchschnittstemperatur in den ersten fünf Stunden beträgt –2 °C.

Leitfrage:

Geben Sie an, welcher Funktionstyp für die Modellierung des Temperaturverlaufs gewählt werden müsste, damit alle fünf oben angeführten Aussagen auf jeden Fall richtig sind!
Begründen Sie Ihre Entscheidung!

Lösung zur Aufgabe 4

Außentemperatur

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Nur die Interpretationen 1 und 3 lassen sich aus der gegebenen Gleichung korrekt schlussfolgern.

Die gegebene Gleichung bedeutet, dass die mittlere Änderungsrate der Temperatur im Intervall [0; 5] –2 °C pro Stunde beträgt. Somit nimmt die Temperatur im Mittel um 2 °C pro Stunde ab und fällt insgesamt um $5 \cdot 2 = 10$ °C.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn erkannt wird, dass sich ausschließlich die Interpretationen 1 und 3 eindeutig schlussfolgern lassen, und dies korrekt begründet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Damit alle fünf Aussagen auf jeden Fall richtig sind, ist eine lineare Funktion (mit $k = -2$ und $d = 3$) zu wählen.

Da bei einer linearen Funktion die momentane Änderungsrate konstant ist (und somit der mittleren Änderungsrate in einem beliebigen Intervall entspricht), sind im Falle einer linearen Abnahme Aussage 2 und Aussage 4 richtig.
Wenn die Temperatur im Zeitintervall [0; 5] linear von +3 °C auf –7 °C abnimmt, ist auch Aussage 5 richtig.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der richtige Funktionstyp angegeben und diese Entscheidung korrekt begründet wird.

Aufgabe 5

Qualitätskontrolle

Ein Produkt wird einer Qualitätskontrolle unterzogen, die aus zwei Prüfverfahren besteht. Das Produkt wird zuerst einem Prüfverfahren unterzogen, bei dem ein Mangel erfahrungsgemäß in n_1 von 100 Fällen ($n_1 \in \mathbb{N}$) erkannt wird. Produkte, die das erste Prüfverfahren bestanden haben, werden einem zweiten Prüfverfahren unterzogen, bei dem ein Mangel erfahrungsgemäß in n_2 von 100 Fällen ($n_2 \in \mathbb{N}$) erkannt wird. Die beiden Prüfverfahren sind voneinander unabhängig.

Aufgabenstellung:

Geben Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit an, dass ein mangelhaftes Produkt bei dieser Qualitätskontrolle als solches erkannt wird, und erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Beim ersten Prüfverfahren werden erfahrungsgemäß 95 % der mangelhaften Produkte erkannt. Berechnen Sie, wie groß n_2 sein muss, damit ein mangelhaftes Produkt bei der Qualitätskontrolle mit 99,9%iger Wahrscheinlichkeit als solches erkannt wird!

Lösung zur Aufgabe 5

Qualitätskontrolle

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Möglicher Term:

$$\frac{n_1}{100} + \left(1 - \frac{n_1}{100}\right) \cdot \frac{n_2}{100}$$

Der Mangel wird beim ersten Prüfverfahren mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{n_1}{100}$ erkannt.
Der zweite Summand gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Mangel nicht beim ersten Prüfverfahren, sondern beim zweiten Prüfverfahren erkannt wird.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein korrekter Term zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit angegeben und eine (sinngemäß) korrekte Vorgehensweise erklärt wird. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten (beispielsweise die Berechnung mithilfe der Gegenwahrscheinlichkeit: $1 - \left(1 - \frac{100 - n_1}{100} \cdot \frac{100 - n_2}{100}\right)$ und eine entsprechende Erklärung der Vorgehensweise).

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$$0{,}95 + 0{,}05 \cdot \frac{n_2}{100} = 0{,}999$$

$\Rightarrow \quad n_2 = 98$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert von n_2 richtig berechnet wird.