Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reife- und Diplomprüfung

BHS

10. Mai 2016

Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 8)

Korrekturheft

BM BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Korrektur- und Beurteilungsanleitung zur standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

(Detaillierte Informationen dazu finden Sie für den BHS-Bereich im Erlass mit der Geschäftszahl BMBF-17.100/0006-II/2015 des Bundesministeriums für Bildung und Frauen.)

Kompetenzbereiche

Im Beurteilungsmodell für die Angewandte Mathematik wird zwischen zwei Kompetenzbereichen unterschieden:

- *Kompetenzbereich A* (**KA**) umfasst die unabhängig[1] erreichbaren Punkte der Komplexitätsstufen 1 und 2 aus dem Kompetenzstufenraster.
- *Kompetenzbereich B* (**KB**) umfasst die abhängig erreichbaren Punkte und die Punkte der Komplexitätsstufen 3 und 4 aus dem Kompetenzstufenraster.

Die Summe der unabhängig erreichbaren Punkte aus den Komplexitätsstufen 1 und 2 (**KA**) stellt die „wesentlichen Bereiche" eines Klausurheftes dar.

Beurteilung

Als Hilfsmittel für die Beurteilung wird ein auf ein Punktesystem basierender Beurteilungsschlüssel angegeben. Je nach gewichteter Schwierigkeit der vergebenen Punkte in den „wesentlichen Bereichen" wird festgelegt, ab wann die „wesentlichen Bereiche überwiegend" (Genügend) erfüllt sind, d. h., gemäß einem Punkteschema müssen Punkte aus dem Kompetenzbereich A unter Einbeziehung von Punkten aus dem Kompetenzbereich B in ausreichender Anzahl abhängig von der Zusammenstellung der Klausurhefte gelöst werden. Darauf aufbauend wird die für die übrigen Notenstufen zu erreichende Punktezahl festgelegt.

Nach der Punkteermittlung soll die Arbeit der Kandidatin / des Kandidaten nochmals ganzheitlich qualitativ betrachtet werden. Unter Zuhilfenahme des Punkteschemas und der ganzheitlichen Betrachtung ist von der Prüferin / vom Prüfer ein verbal begründeter Beurteilungsvorschlag zu erstellen, wobei die Ergebnisse der Kompetenzbereiche A und B in der Argumentation zu verwenden sind.

Beurteilungsschlüssel für die vorliegende Klausur:

45–50 Punkte	Sehr gut
39–44 Punkte	Gut
32–38 Punkte	Befriedigend
23–31 Punkte	Genügend
0–22 Punkte	Nicht genügend

[1] Unabhängige Punkte sind solche, für die keine mathematische Vorleistung erbracht werden muss. Als mathematische Vorleistung gilt z. B. das Aufstellen einer Gleichung (unabhängiger Punkt) mit anschließender Berechnung (abhängiger Punkt).

Handreichung zur Korrektur der standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

1. In der Lösungserwartung ist nur **ein möglicher** Lösungsweg angegeben. Andere richtige Lösungswege sind als gleichwertig anzusehen.

2. Der Lösungsschlüssel ist **verbindlich** anzuwenden unter Beachtung folgender Vorgangsweisen:

   a. Punkte sind nur zu vergeben, wenn die abgefragte Handlungskompetenz in der Bearbeitung vollständig erfüllt ist.

   b. Berechnungen ohne nachvollziehbaren Rechenansatz bzw. ohne nachvollziehbare Dokumentation des Technologieeinsatzes (verwendete Ausgangsparameter und die verwendete Technologiefunktion müssen angegeben sein) sind mit null Punkten zu bewerten.

   c. Werden zu einer Teilaufgabe mehrere Lösungen bzw. Lösungswege von der Kandidatin / vom Kandidaten angeboten und nicht alle diese Lösungen bzw. Lösungswege sind korrekt, so ist diese Teilaufgabe mit null Punkten zu bewerten.

   d. Bei abhängiger Punktevergabe gilt das Prinzip des Folgefehlers. Das heißt zum **Beispiel**: Wird von der Kandidatin / vom Kandidaten zu einem Kontext ein falsches Modell aufgestellt, mit diesem Modell aber eine richtige Berechnung durchgeführt, so ist der Berechnungspunkt zu vergeben, wenn das falsch aufgestellte Modell die Berechnung nicht vereinfacht.

   e. Werden von der Kandidatin / vom Kandidaten kombinierte Handlungsanweisungen in einem Lösungsschritt erbracht, so sind alle Punkte zu vergeben, auch wenn der Lösungsschlüssel Einzelschritte vorgibt.

   f. Abschreibfehler, die aufgrund der Dokumentation der Kandidatin / des Kandidaten als solche identifizierbar sind, sind ohne Punkteabzug zu bewerten, wenn sie zu keiner Vereinfachung der Aufgabenstellung führen.

   g. Rundungsfehler können vernachlässigt werden, wenn die Rundung nicht explizit eingefordert ist.

   h. Jedes Diagramm bzw. jede Skizze, die Lösung einer Handlungsanweisung ist, muss eine qualitative Achsenbeschriftung enthalten, andernfalls ist dies mit null Punkten zu bewerten.

   i. Die Angabe von Einheiten kann bei der Punktevergabe vernachlässigt werden, sofern sie im Lösungsschlüssel nicht explizit eingefordert wird.

3. Sind Sie sich als Korrektor/in über die Punktevergabe nicht schlüssig, können Sie eine Korrekturanfrage an das BIFIE (via Telefon-Hotline oder Online-Helpdesk) stellen.

Aufgabe 1

Gondelbahn auf den Untersberg

Möglicher Lösungsweg

a) Die mittlere Steigung des Tragseils der Gondelbahn auf den Untersberg beträgt rund 0,52.

b) Steigung: $k = \frac{1\,382 - 1\,148}{1\,712 - 1\,385} = 0{,}7155\ldots$
Steigungswinkel: $\alpha = \arctan(k) = 35{,}58\ldots° \approx 35{,}6°$
Der Steigungswinkel des Seilverlaufs in diesem Abschnitt ist kleiner als 40°.

c) Gleichungssystem:
I. $456 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$
II. $740 = a \cdot 740^2 + b \cdot 740 + c$
III. $1\,148 = a \cdot 1\,385^2 + b \cdot 1\,385 + c$

Lösen dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}0001796\ldots \approx 0{,}000180$
$b = 0{,}2508\ldots \approx 0{,}251$
$c = 456$

Lösungsschlüssel

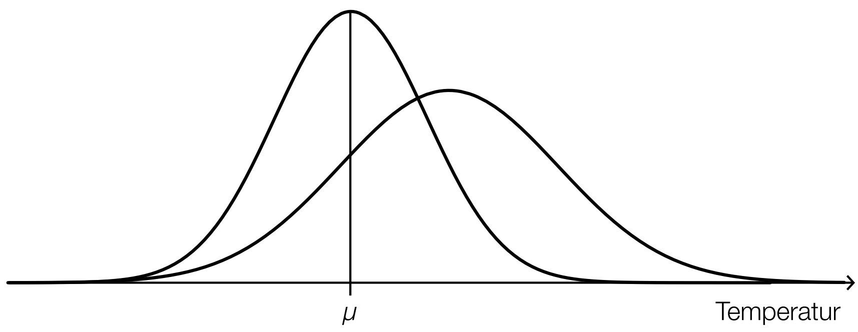
a) 1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang (KA)
b) 1 × D: für die richtige Überprüfung (KA)
c) 1 × A: für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems (KA)
1 × B: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten (KB)

Aufgabe 2

Klimawandel und Ozon

Möglicher Lösungsweg

a)



b) $1 - 0{,}9917 = 0{,}0083$
Die Ozonmenge pro Quadratmeter nimmt jährlich um 0,83 % ab.

Zur berechneten Zeit t hat sich die Ozonmenge pro Quadratmeter halbiert (Halbwertszeit).

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für die richtige Darstellung der Erhöhung des Erwartungswertes (Maximumstelle weiter rechts) (KA)
1 × A2: für die richtige Darstellung der Erhöhung der Standardabweichung (Maximalwert niedriger und Kurve breiter) (KB)

b) 1 × C1: für das richtige Ermitteln der jährlichen Abnahme in Prozent (KA)
1 × C2: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang (KA)

Aufgabe 3

Section-Control

Möglicher Lösungsweg

a) $s = 6$ km

$v_1 = 60$ km/h: $t_1 = \frac{s}{v_1} = 0{,}1$ h

$v_2 = 66$ km/h: $t_2 = \frac{s}{v_2} = 0{,}\overline{09}$ h

90 % von 0,1 h sind exakt 0,09 h. Das ist weniger als t_2.

b) $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1\,000\text{ m}}{70\text{ s}} = 14{,}285...\text{ m/s} \approx 14{,}29\text{ m/s}$

Die Fahrzeit für die erste Weghälfte beträgt 70 Sekunden. Die Fahrzeit für die zweite Weghälfte beträgt nur 40 Sekunden. Daher ist die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte geringer.

c) Der Flächeninhalt des Trapezes entspricht dem zurückgelegten Weg: $s = \frac{v_A + v_E}{2} \cdot t$.

$v_A = 2 \cdot \frac{s}{t} - v_E$

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für einen richtigen Nachweis (KA)
b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der mittleren Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte (KA)
1 × D: für eine richtige Argumentation (KB)
c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel (KB)

Aufgabe 4

Blutkreislauf

Möglicher Lösungsweg

a) Umwandlung: 5 L = $5 \cdot 10^6$ mm^3
Blutzellen in $5 \cdot 10^6$ mm^3: $25 \cdot 10^{12} + 15 \cdot 10^{11} + 3 \cdot 10^{10} = 2{,}653 \cdot 10^{13}$
Anzahl der Blutzellen pro mm^3: $\frac{2{,}653 \cdot 10^{13}}{5 \cdot 10^6} = 5{,}306 \cdot 10^6$

In 1 Kubikmillimeter Blut befinden sich rund 5,3 Millionen Blutzellen.

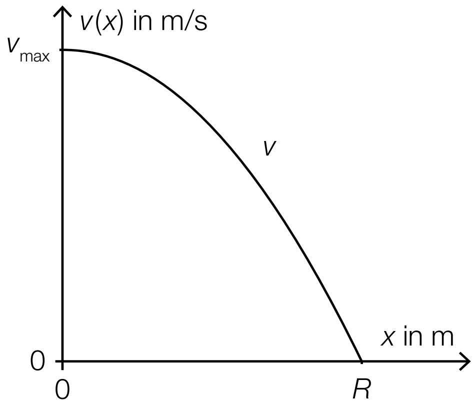
b) $P(t) = k \cdot t + d$

t … Alter in Jahren
$P(t)$ … Pumpleistung des Herzens im Alter t in Litern pro Minute

$k = -\frac{2{,}5}{50} = -0{,}05$
$d = 5 - (-0{,}05) \cdot 20 = 6$
$P(t) = -0{,}05 \cdot t + 6$

Pro Lebensjahr nimmt die Pumpleistung des Herzens um 0,05 Liter pro Minute ab.

c)



Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Umwandlung von 5 Litern in mm^3 (KA)
1 × B2: für die richtige Berechnung der Anzahl der Blutzellen pro mm^3 (KB)

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung (KA)
1 × C: für die richtige Interpretation des Wertes der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang (KB)

c) 1 × A: für das richtige Skizzieren des Funktionsgraphen (Graph einer nach unten offenen quadratischen Funktion mit den richtigen Funktionswerten an den Stellen 0 und R) (KB)

Aufgabe 5

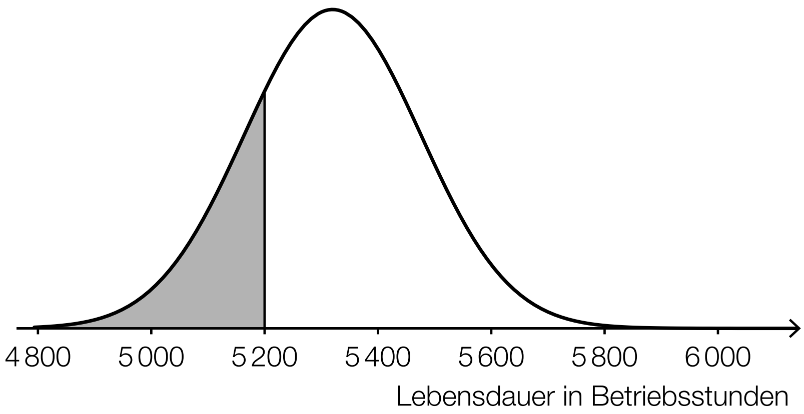
Batterien

Möglicher Lösungsweg

a) Binomialverteilung: $n = 40$, $p = 0{,}02$
Berechnung mittels Technologieeinsatz: $P(X \leq 2) = 0{,}95432\ldots \approx 95{,}43\ \%$

b) Der angegebene Ausdruck gibt den Erwartungswert für die Anzahl der defekten Batterien in dieser Lieferung an.

c) Berechnung des Intervalls mittels Technologieeinsatz:
$P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad [5\,063{,}4;\ 5\,576{,}6]$



Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit (KA)
b) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Bedeutung in diesem Sachzusammenhang (KB)
c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Intervalls (KA)
1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit (KA)

Aufgabe 6

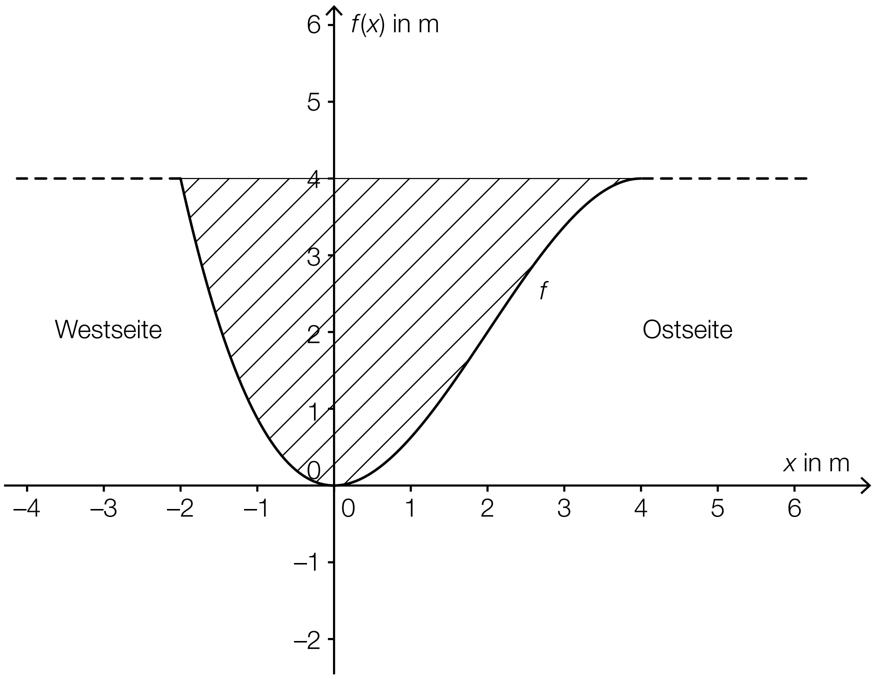
Am Fluss

Möglicher Lösungsweg

a) $f''(x) = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{3}{2}$

$0 = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; x = 2$

An der Stelle $x = 2$ steigt das Querschnittsprofil auf der Ostseite am stärksten an.



b) $\overline{CD} = \overline{AB} \cdot (\tan(\beta) - \tan(\alpha))$

$\overline{CD} = 26{,}1\ldots \text{ m} \approx 26 \text{ m}$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wendestelle der Funktion f
(In der Grafik ist klar zu erkennen, dass der Anstieg des Querschnittsprofils an der Ostseite an der Wendestelle am stärksten ist. Eine rechnerische Überprüfung des Steigungsverhaltens der Funktion an der berechneten Stelle sowie eine Überprüfung der Randstellen sind daher nicht erforderlich.) (KB)

1 × C: für das richtige Kennzeichnen der Fläche (KA)

b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Streckenlänge $\overline{CD}$ (KA)

Aufgabe 7 (Teil B)

Sportartikel

Möglicher Lösungsweg

a) Die Gewinnfunktion ist im gegebenen Fall eine lineare Funktion mit positiver Steigung. Sie nimmt ihren maximalen Funktionswert am rechten Rand des Definitionsbereichs (Kapazitätsgrenze) an.

$G(x) = 40 \cdot x - (25 \cdot x + 300)$
$G(50) = 450$
Der maximale Gewinn beträgt 450 GE.

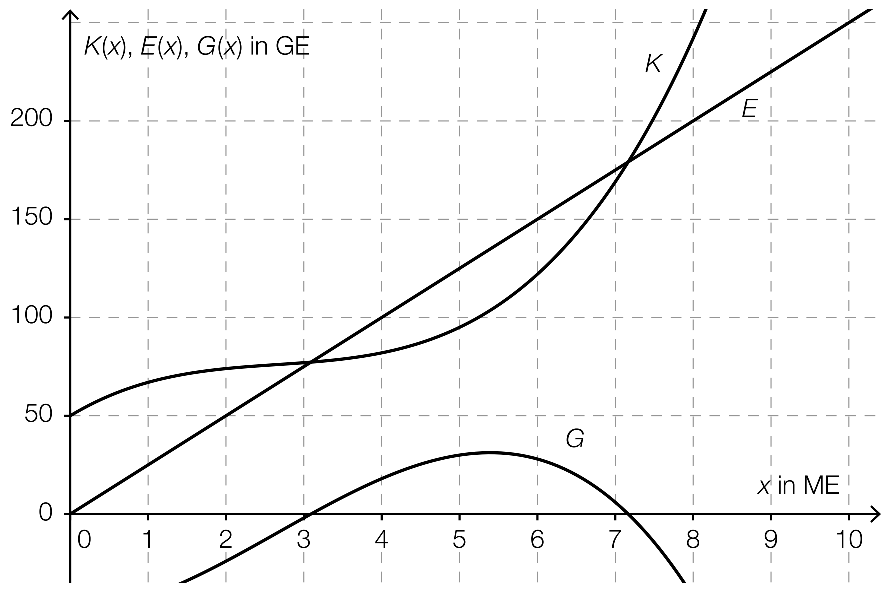
b) I. $K(0) = 2\,900$
II. $K''(5) = 0$
III. $K(5) = 3\,100$
IV. $K(9) = 3\,252{,}80$

Lösen dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}2$; $b = -3$; $c = 50$; $d = 2\,900$

c) $K(x) = \int K'(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}05 \cdot x^3 - 0{,}3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + C$
$K(0) = 30 \Rightarrow C = 30$
$K(x) = 0{,}05 \cdot x^3 - 0{,}3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 30$

Betriebsoptimum: rund 8 ME
Toleranzbereich: [7 ME; 9 ME]

d)



$E(x) = 25 \cdot x$

Lösungsschlüssel

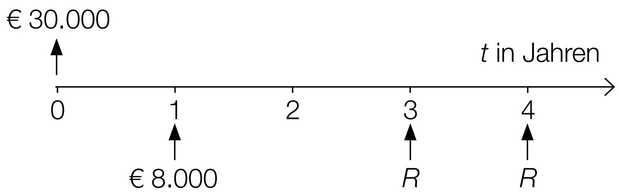
a) 1 × D: für die richtige Erklärung (Auch eine Argumentation, dass die Gewinnfunktion keine lokalen Extremstellen hat, an denen die Tangentensteigung null ist, ist zulässig.) (KA)
   1 × B: für die richtige Berechnung des maximalen Gewinns (KB)
b) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der Information zur Kostenkehre (KA)
   1 × A2: für das richtige Aufstellen der 3 Gleichungen mithilfe der Informationen zu den Kosten (KA)
   1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten (KB)
c) 1 × A: für das richtige Ermitteln der Kostenfunktion (KA)
   1 × C: für das richtige Ablesen des Betriebsoptimums im Toleranzbereich [7 ME; 9 ME] (KA)
d) 1 × C: für die richtige Beschriftung der 3 dargestellten Funktionsgraphen (KA)
   1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Erlösfunktion (KB)

Aufgabe 8 (Teil B)

Renovierungskredit

Möglicher Lösungsweg

a)



$30\,000 = 8\,000 \cdot 1{,}02^{-1} + R \cdot 1{,}02^{-3} + R \cdot 1{,}02^{-4}$
$R = 11\,872{,}921\ldots$

Die Ratenhöhe beträgt € 11.872,92.

Wenn die Raten früher bezahlt werden, wird die ausstehende Kreditsumme über eine kürzere Zeitspanne verzinst. Daher sind die Raten niedriger.

b) $i_{12} = \sqrt[12]{1 + 0{,}0458} - 1 = 0{,}0037388\ldots$

Der zugehörige monatliche Zinssatz beträgt rund 0,3739 %.

$B_{\text{nach}} = 559{,}11 \cdot \frac{1}{(1 + i_{12})^{60}} \cdot \frac{(1 + i_{12})^{60} - 1}{i_{12}} = 30\,000{,}132\ldots$
$B_{\text{vor}} = B_{\text{nach}} \cdot (1 + i_{12}) = 30\,112{,}297\ldots$

Es handelt sich um eine nachschüssige Ratenzahlung.

c) $3\,480 \cdot 0{,}9 = 3\,132$

Unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses muss Frau Eberharter Halbjahresraten in Höhe von € 3.132 bezahlen.

$30\,000 = 3\,132 \cdot \frac{1}{(1 + i_2)^{10}} \cdot \frac{(1 + i_2)^{10} - 1}{i_2}$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $i_2 = 0{,}007906\ldots$
$i = (1 + i_2)^2 - 1 = 0{,}01587\ldots \approx 1{,}59\ \%$

Der effektive Jahreszinssatz beträgt rund 1,59 %.

Die Verzinsung beträgt 0 %, wenn die Halbjahresraten $\frac{€\ 30.000}{10} = €\ 3.000$ betragen. Dafür muss zur vereinbarten Halbjahresrate von € 3.480 ein Zuschuss in Höhe von € 480 gewährt werden.

d) Im Semester 1 erfolgt keine Rückzahlung. Im Semester 2 werden nur die anfallenden Zinsen zurückbezahlt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Darstellen auf einer Zeitachse (KA)
   1 × B: für die richtige Berechnung der Ratenhöhe (KB)
   1 × D: für die richtige Erklärung (KA)
b) 1 × B: für das richtige Ermitteln des zugehörigen monatlichen Zinssatzes (KA)
   1 × D: für die richtige Überprüfung (KB)
c) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Höhe der Halbjahresraten unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses (KA)
   1 × B2: für das richtige Ermitteln des effektiven Jahreszinssatzes (KB)
   1 × B3: für das richtige Ermitteln der Höhe des Annuitätenzuschusses (KB)
d) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang (KA)

Aufgabe 9 (Teil B)

Staatseinnahmen und -ausgaben

Möglicher Lösungsweg

a) Ermitteln der Gleichung der Regressionsgeraden mittels Technologieeinsatz:
$f(t) = 5{,}1 \cdot t + 128{,}5$

Ermitteln des Korrelationskoeffizienten mittels Technologieeinsatz: $r \approx 0{,}992$
Da der Korrelationskoeffizient sehr nahe bei 1 liegt, kann ein starker linearer Zusammenhang vermutet werden.

$f(9) = 174{,}39\ldots \approx 174{,}4$
Gemäß diesem Modell betragen die Staatsausgaben im Jahr 2015 rund € 174,4 Milliarden.

b) $\sqrt[4]{1{,}06 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}081 \cdot 0{,}889} - 1 = 0{,}02886\ldots \approx 2{,}89\,\%$
Die mittlere prozentuelle Änderung der Einnahmen aus Einkommen- und Vermögensteuern pro Jahr beträgt im angegebenen Zeitraum rund $+2{,}89\,\%$.

c) Da der Koeffizient $a = -0{,}0027$ negativ ist, ist der Graph dieser quadratischen Funktion eine nach unten geöffnete Parabel. Der Scheitel dieser Parabel ist daher ein Hochpunkt.

$V'(t) = -0{,}0054 \cdot t + 0{,}1732$
$V'(t) = 0 \;\Rightarrow\; t = 32{,}07\ldots \approx 32{,}1$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $\int_0^{36} V(t)\,\mathrm{d}t = 100{,}4148$

Dieses Integral beschreibt näherungsweise die Summe der Vermögenseinkommen der Jahre 1976 bis 2012.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsgeraden (KA)
1 × D: für die richtige Beurteilung mithilfe des Korrelationskoeffizienten (KA)
1 × B2: für die richtige Berechnung der Ausgaben im Jahr 2015 (KB)
b) 1 × B: für die richtige Berechnung der mittleren prozentuellen Änderung pro Jahr (KA)
c) 1 × D: für die richtige Argumentation anhand der Funktionsgleichung (KA)
1 × B1: für die richtige Berechnung der Stelle des Maximums (KA)
1 × B2: für die richtige Berechnung des Integrals (KA)
1 × C: für die richtige Interpretation des Integrals im gegebenen Sachzusammenhang (KB)