# Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Juni 2016

# Mathematik

Kompensationsprüfung 4
Angabe für **Prüfer/innen**

BMBF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

# Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin/der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

## Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

| Note | zumindest erreichte Punkte |
|---|---|
| „Genügend“ | 4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte<br>3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt |
| „Befriedigend“ | 5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte<br>4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt<br>3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte |
| „Gut“ | 5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt<br>4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte<br>3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte |
| „Sehr gut“ | 5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte<br>4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte |

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin/vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

# Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

| | Grundkompetenzpunkt erreicht | Leitfragenpunkt erreicht |
|---|---|---|
| Aufgabe 1 | | |
| Aufgabe 2 | | |
| Aufgabe 3 | | |
| Aufgabe 4 | | |
| Aufgabe 5 | | |

# Aufgabe 1

## Quadratische Gleichungen

Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 - 2 \cdot x + k = 0$ mit $k \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, für welche Werte von $k$ die angegebene quadratische Gleichung

– keine
– genau eine
– zwei verschiedene

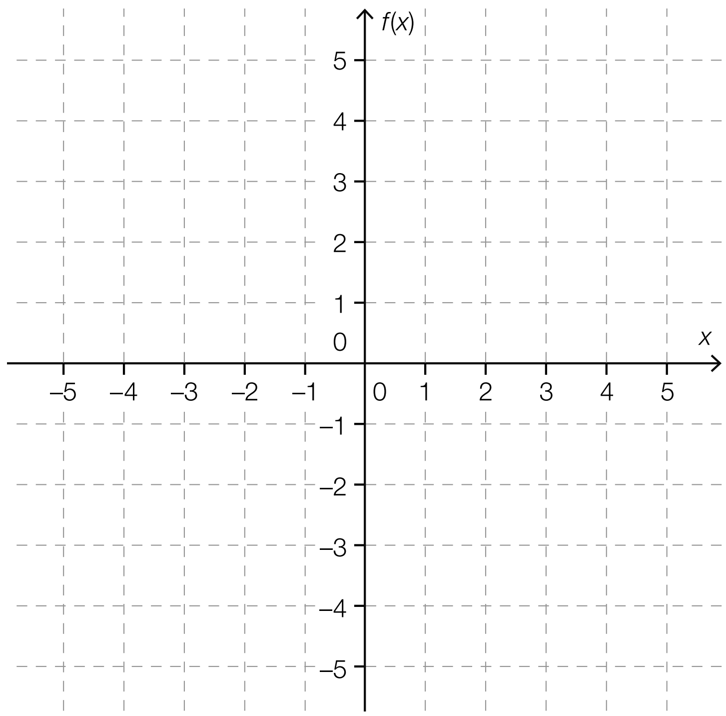
reelle Lösung(en) hat, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Die Lösungen der gegebenen quadratischen Gleichung können mithilfe des Graphen der quadratischen Funktion $f$ mit $f(x) = x^2 - 2 \cdot x + k$ veranschaulicht werden.

Stellen Sie den Graphen der Funktion $f$ für $k = 1$ im nachstehenden Koordinatensystem dar und erläutern Sie, wie man aufgrund des Graphen von $f$ auf die Anzahl der Lösungen der entsprechenden quadratischen Gleichung schließen kann!

Erläutern Sie, wie sich eine Änderung des Parameters $k$ auf den Verlauf des Graphen der Funktion $f$ und auf die Lösungen der entsprechenden quadratischen Gleichung auswirkt!



# Lösung zur Aufgabe 1

## Quadratische Gleichungen

### Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-k}$

Die Anzahl der (reellen) Lösungen hängt vom Wert der Diskriminante ab.

– keine Lösung, wenn $1 - k < 0 \Rightarrow k > 1$
– genau eine Lösung, wenn $1 - k = 0 \Rightarrow k = 1$
– zwei Lösungen, wenn $1 - k > 0 \Rightarrow k < 1$

### Lösungsschlüssel:

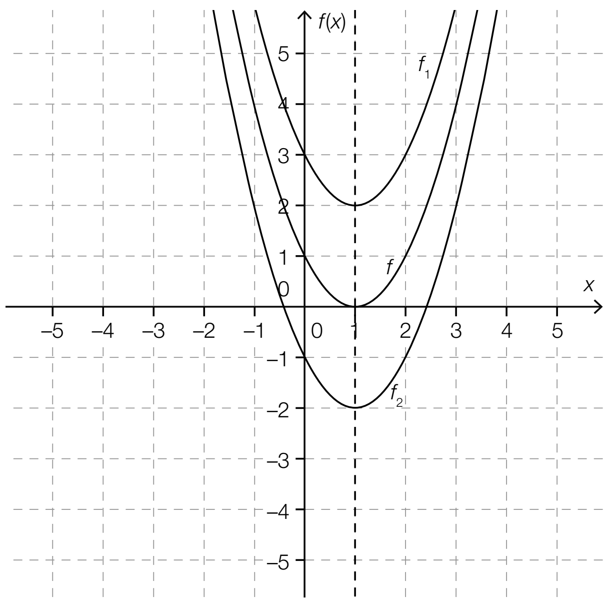
Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtigen Werte von $k$ für die einzelnen Lösungsfälle angegeben werden und eine korrekte Vorgehensweise erläutert wird.

### Lösungserwartung zur Leitfrage:

Grafische Veranschaulichung: $f$ stellt den Graphen der Funktion $f$ für $k = 1$ dar, die Lösungen der entsprechenden quadratischen Gleichung sind die Nullstellen von $f$.

Für $k > 1$ erfolgt eine Verschiebung in Richtung der positiven senkrechten Achse, der dazugehörige Graph $f_1$ hat keine Nullstellen und die entsprechende quadratische Gleichung hat somit keine Lösung.

Für $k < 1$ erfolgt eine Verschiebung in Richtung der negativen senkrechten Achse, der dazugehörige Graph $f_2$ hat zwei Nullstellen und die entsprechende quadratische Gleichung hat somit zwei Lösungen.




### Lösungsschlüssel:

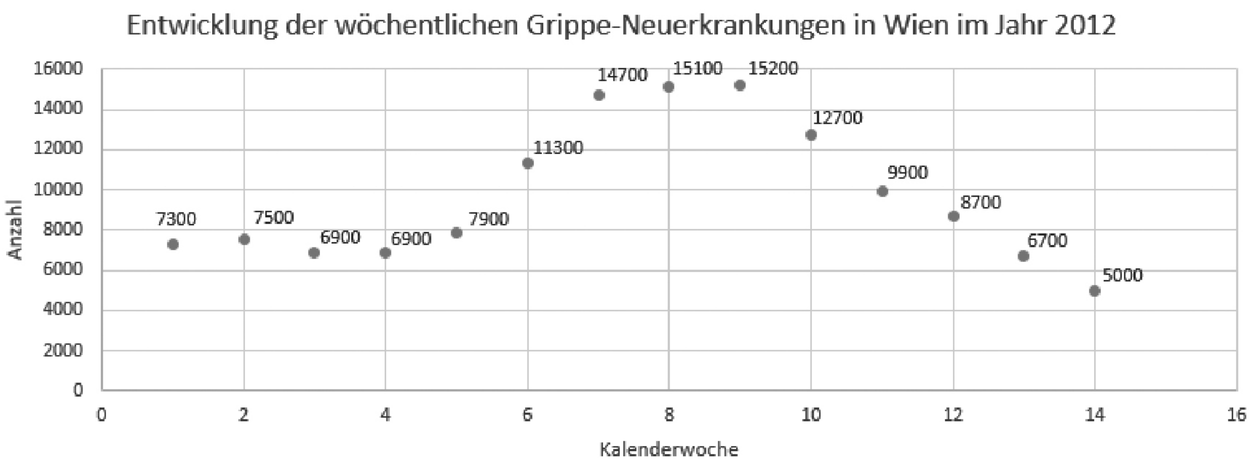
Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Graph der Funktion $f$ für $k = 1$ richtig dargestellt wird, die Ermittlung der Lösungen der quadratischen Gleichung mithilfe der Nullstellen von $f$ erkannt wird und die Auswirkungen der Änderung des Parameters $k$ (sinngemäß) korrekt erläutert werden.

Der Graph von $f$ muss als nach oben geöffnete Parabel, deren Extremstelle bei $x = 1$ liegt, erkennbar sein.

# Aufgabe 2

## Grippe

Die nachstehende Grafik beschreibt die Entwicklung der gemeldeten wöchentlichen Grippe-Neuerkrankungen in Wien im Jahr 2012 von der Kalenderwoche 1 bis zur Kalenderwoche 14.




*(Datenquelle: https://www.wien.gv.at/gesundheit/einrichtungen/grippemeldedienst/archiv.html#saison1112 [13.05.2016])*

### Aufgabenstellung:

Anhand der Daten von Kalenderwoche 4 und Kalenderwoche 5 kann mithilfe eines exponentiellen Modells die Anzahl der Grippe-Neuerkrankungen für die Kalenderwoche 6 prognostiziert werden. Berechnen Sie, um wie viel dieser prognostizierte Wert vom in der Grafik angeführten tatsächlichen Wert abweicht!

### Leitfrage:

Berechnen Sie, in welcher Kalenderwoche durch das soeben erstellte exponentielle Modell der in der Grafik angegebene Maximalwert erreicht worden wäre!
Erklären Sie, warum eine Modellierung mit einer Exponentialfunktion nur zeitlich begrenzt sinnvoll sein kann!

# Lösung zur Aufgabe 2

## Grippe

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Der Wachstumsfaktor beträgt $\frac{7\,900}{6\,900} \approx 1{,}145$.

Der prognostizierte Wert für die Kalenderwoche 6 liegt bei ca. 9 045 Grippe-Neuerkrankungen.

Der prognostizierte Wert weicht um ca. 2 255 vom tatsächlichen Wert ab.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Abweichung korrekt angegeben wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Vorgehensweise:

$15\,200 = 6\,900 \cdot \left(\frac{7\,900}{6\,900}\right)^t \;\Rightarrow\; t \approx 5{,}84$

In der Kalenderwoche 10 hätte das exponentielle Modell den in der Grafik angegebenen Maximalwert erreicht.

Eine Modellierung mithilfe einer Exponentialfunktion ist nur zeitlich begrenzt sinnvoll, da die Exponentialfunktion (streng) monoton wachsend ist und daher die Anzahl der Grippe-Neuerkrankungen im Laufe der Zeit irreal hohe Werte erreichen würde.

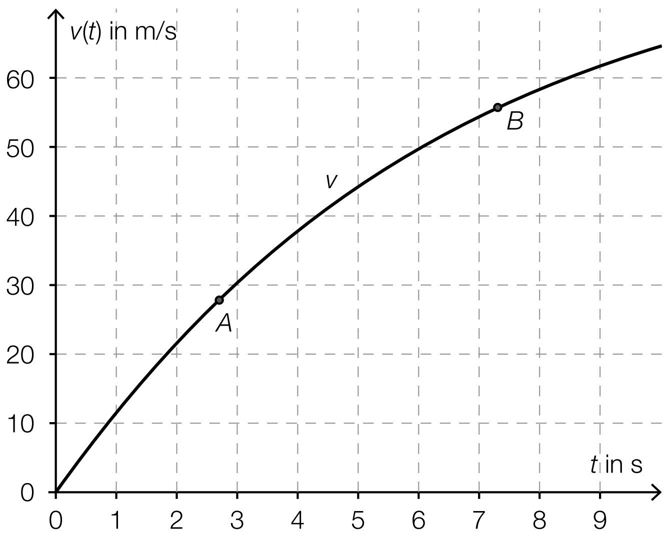
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Kalenderwoche korrekt ermittelt und eine (sinngemäß) richtige Erklärung angegeben wird.

# Aufgabe 3

## Beschleunigungsvorgang

Im nachstehenden Diagramm ist die Geschwindigkeit $v(t)$ (in m/s) eines Rennautos während der Beschleunigungsphase in Abhängigkeit von der Zeit $t$ (in Sekunden) dargestellt. Weiters sind zwei Punkte $A = (2{,}7|27{,}78)$ und $B = (7{,}3|55{,}56)$ markiert.




Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Wert der Steigung derjenigen Sekante $s$, die durch die Punkte $A$ und $B$ verläuft, und deuten Sie diesen Wert im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Ermitteln Sie grafisch denjenigen Punkt $T$, in dem die Tangente dieselbe Steigung wie die Sekante $s$ durch die Punkte $A$ und $B$ hat, und geben Sie die Koordinaten von $T$ an!

Deuten Sie beide Koordinaten von $T$ und den Wert der Steigung im gegebenen Kontext!

# Lösung zur Aufgabe 3

## Beschleunigungsvorgang

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$k = \frac{55{,}56 - 27{,}78}{7{,}3 - 2{,}7} \approx 6{,}04$

Mögliche Deutungen:
Die mittlere Beschleunigung (mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit) im Zeitintervall [2,7 s; 7,3 s] beträgt ca. 6 m/s$^2$.

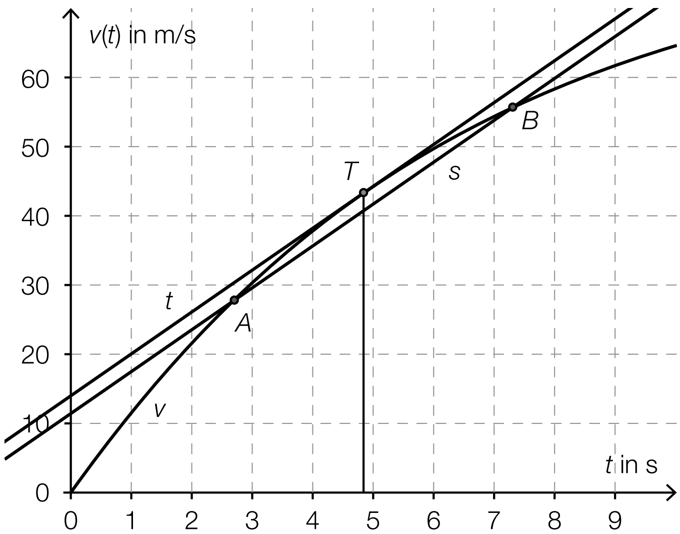
*oder:*

Die Geschwindigkeit des Rennautos nimmt im Zeitintervall [2,7 s; 7,3 s] in jeder Sekunde durchschnittlich um ca. 6 m/s zu.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert der Steigung korrekt ermittelt und (sinngemäß) korrekt gedeutet wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:




$T \approx (4{,}8|43)$

Nach ca. 4,8 s hat das Rennauto eine Geschwindigkeit von ca. 43 m/s erreicht. Die momentane Beschleunigung beträgt zu diesem Zeitpunkt ca. 6 m/s$^2$.

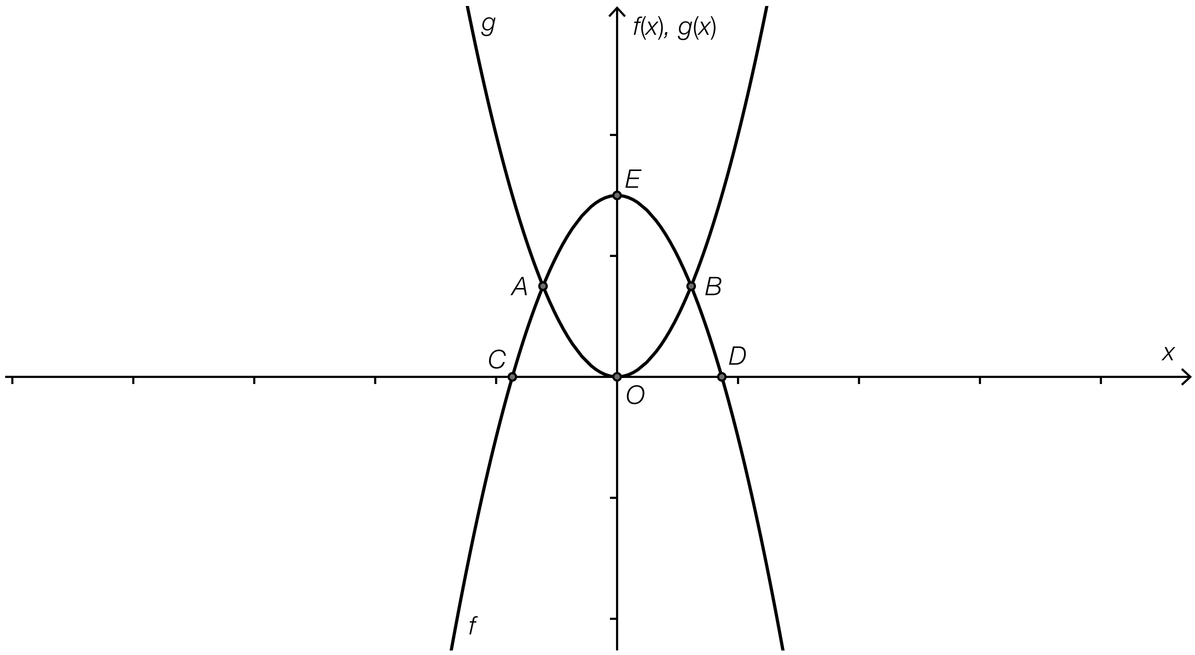
Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Koordinaten des Punktes $T$ korrekt angegeben werden und eine (sinngemäß) korrekte Deutung erfolgt.
Toleranzintervall für die Koordinaten von $T$: [4,0; 5,5] bzw. [38; 48]

# Aufgabe 4

## Flächenberechnung

Gegeben sind die Graphen von zwei quadratischen Funktionen $f$ und $g$, die symmetrisch zur senkrechten Achse liegen:




Dabei gilt:

$B = (a|b)$
$D = (d|0)$
$O = (0|0)$
$E = (0|e)$ mit $a, b, d, e \in \mathbb{R}$

### Aufgabenstellung:

Die Graphen von $g$ und $f$ und die positive $x$-Achse begrenzen ein Flächenstück.

Geben Sie einen Term zur Berechnung der Größe dieses Flächenstücks an!

### Leitfrage:

Skizzieren Sie den Graphen der Stammfunktion $F$ der Funktion $f$ mit $F(0) = 0$ in der gegebenen Abbildung!

Markieren Sie in der Abbildung diejenige Fläche, deren Inhalt gleich $F(d)$ ist!

# Lösung zur Aufgabe 4

## Flächenberechnung

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

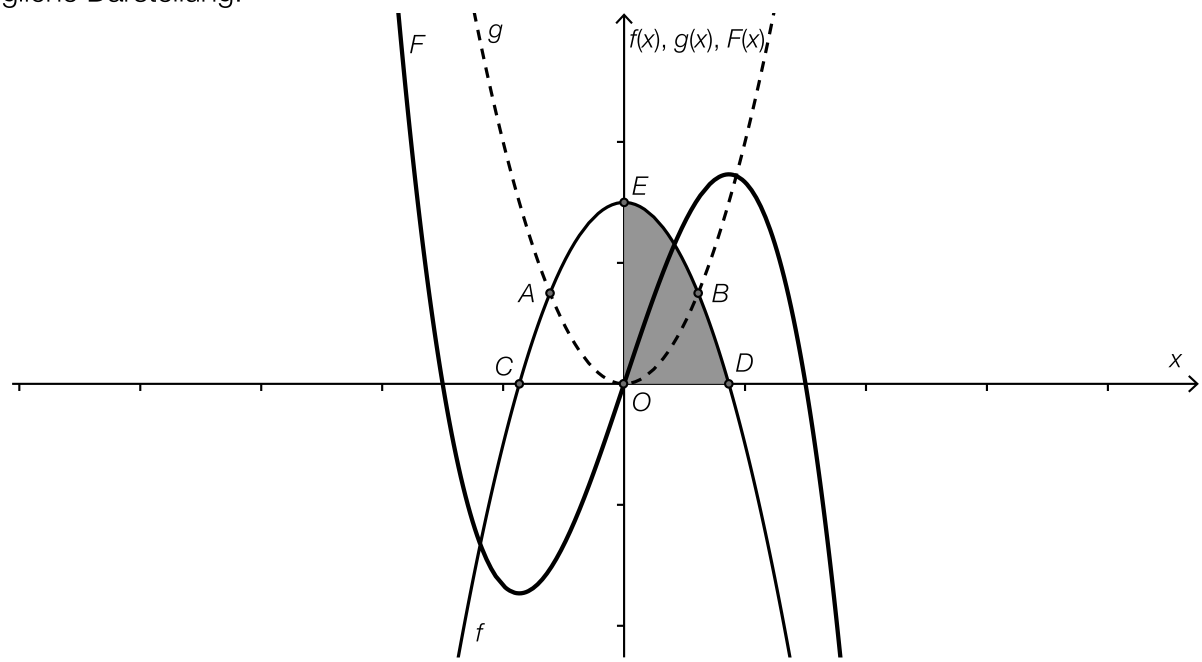
$$\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn ein korrekter Term angegeben wird. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Mögliche Darstellung:




Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Graph von $F$ richtig eingezeichnet ($F$ muss als Polynomfunktion 3. Grades mit der Minimumstelle $x = -d$, der Maximumstelle $x = d$ und der Wendestelle $x = 0$ erkennbar sein) und eine entsprechende Fläche markiert wird.

# Aufgabe 5

## Datenliste

Gegeben ist eine geordnete Datenliste von zehn verschiedenen natürlichen Zahlen $x_1 < x_2 < ... < x_{10}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, ob sich das arithmetische Mittel, der Median und/oder die Spannweite der Datenliste verändern, wenn der kleinste Wert $x_1$ der Datenliste um 1 verringert wird, der größte Wert $x_{10}$ der Datenliste um 1 vergrößert wird und die restlichen Werte der Datenliste unverändert bleiben!

Begründen Sie Ihre Entscheidungen und geben Sie gegebenenfalls diese Veränderungen an!

Leitfrage:

Angenommen, der ursprüngliche Wert $x_1$ wird nun um 5 vergrößert und der ursprüngliche Wert $x_{10}$ wird um 5 verkleinert.

Welche der statistischen Kennzahlen *arithmetisches Mittel*, *Median*, *Modus*, *Standardabweichung* und *Spannweite* ändert/ändern sich

I mit Sicherheit
II je nach Datenliste
III keinesfalls?

Begründen Sie Ihre Antworten!

# Lösung zur Aufgabe 5

## Datenliste

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Das arithmetische Mittel bleibt gleich, da die Summe der zehn Werte unverändert bleibt.

Der Median bleibt gleich, da der 5. und der 6. Wert und somit auch deren arithmetisches Mittel unverändert bleiben.

Die Spannweite der Datenliste wird um 2 größer, da der Abstand vom kleinsten zum größten Wert um 2 größer wird.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn für alle drei Kennzahlen richtig angegeben und begründet wird, ob und wie sich diese ändern bzw. nicht ändern.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

I Die Spannweite und die Standardabweichung ändern sich mit Sicherheit (nehmen ab), da die neue Spannweite kleiner ist und die beiden geänderten Werte weniger weit vom arithmetischen Mittel abweichen als $x_1$ und $x_{10}$.
Auch die Modi ändern sich. Da die zehn gegebenen Werte unterschiedlich sind, ist jeder Wert Modus. Durch die Änderung der beiden Werte können folgende Werte auftreten:
– Es gibt weiterhin zehn verschiedene Modi, wobei sich die Liste der Modi geändert hat.
– Es gibt nur noch einen Modus oder genau zwei Modi.

II Ob sich der Median ändert, hängt von den konkreten Zahlenwerten ab.
Bei einer ursprünglichen Datenliste wie z. B. 1, 2, ..., 9, 10 bleibt der Median unverändert, bei einer ursprünglichen Datenliste wie z. B. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12 ändert er sich.

III Keinesfalls ändert sich das arithmetische Mittel, da die Summe der zehn Werte unverändert bleibt.

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn richtig begründet wird, warum

I sich Spannweite, Standardabweichung und Modus (Modi) sicher verändern,
II die Änderung des Medians von der Datenliste abhängt,
III das arithmetische Mittel sicher gleich bleibt.