Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reifeprüfung

AHS

Juni 2015

Mathematik

Kompensationsprüfung
Angabe für **Prüfer/innen**

BM|BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Hinweise zur Kompensationsprüfung

Die vorliegenden Unterlagen zur Kompensationsprüfung umfassen fünf Aufgaben, die unabhängig voneinander bearbeitbar sind.

Jede Aufgabe gliedert sich in zwei Aufgabenteile: Bei der „Aufgabenstellung“ muss die Kandidatin / der Kandidat die jeweilige Grundkompetenz nachweisen und bei der Beantwortung der anschließenden „Leitfrage“ ihre/seine Kommunikationsfähigkeit unter Beweis stellen.

Die Prüfer/innen finden im Anschluss an die Aufgabenstellungen auch die Lösungserwartungen und die Lösungsschlüssel.

Die Vorbereitungszeit beträgt mindestens 30 Minuten, die Prüfungszeit maximal 25 Minuten.

Beurteilung

Jede Aufgabe wird mit null, einem oder zwei Punkten bewertet. Dabei ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.

Für die Beurteilung der Prüfung ergibt sich folgendes Schema:

Note	zumindest erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt 4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte 4 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte

Über die Gesamtbeurteilung entscheidet die Prüfungskommission; jedenfalls werden sowohl die von der Kandidatin / vom Kandidaten im Rahmen der Kompensationsprüfung erbrachte Leistung als auch das Ergebnis der Klausurarbeit dafür herangezogen.

Bewertungsraster zur Kompensationsprüfung

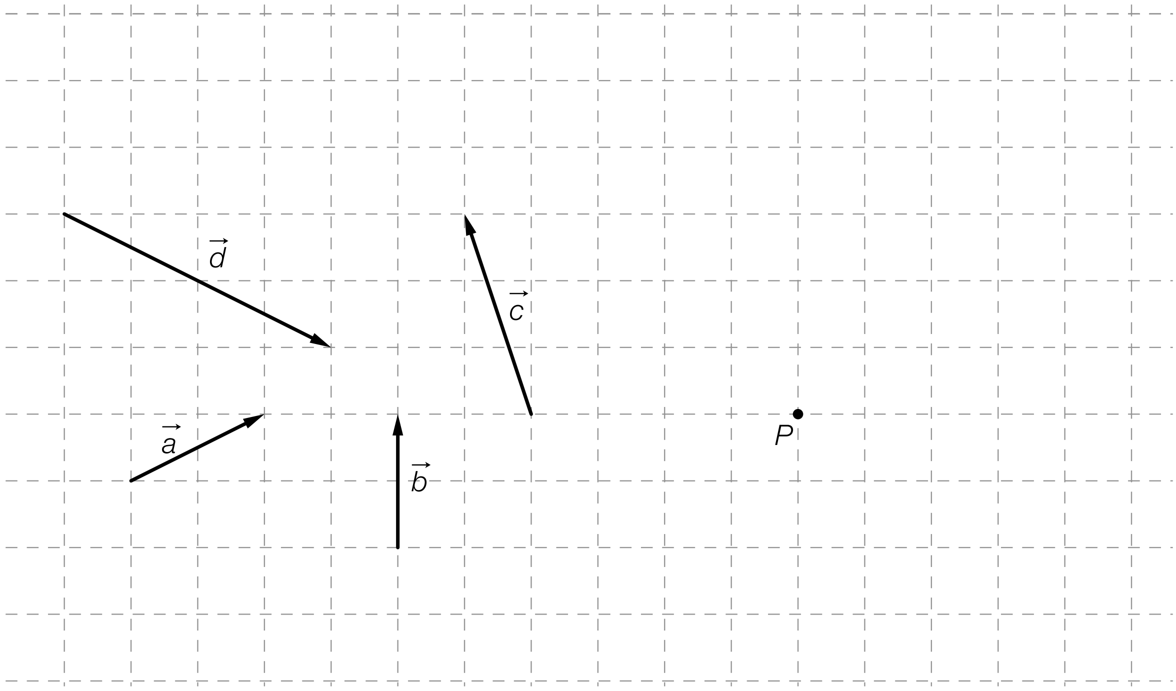
Dieser Bewertungsraster liegt zur optionalen Verwendung vor und dient als Hilfestellung bei der Beurteilung.

	Grundkompetenzpunkt erreicht	Leitfragenpunkt erreicht
Aufgabe 1		
Aufgabe 2		
Aufgabe 3		
Aufgabe 4		
Aufgabe 5		

Aufgabe 1

Vektoren

Gegeben sind Pfeildarstellungen der vier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d} \in \mathbb{R}^2$ und ein Punkt P.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie in der gegebenen Abbildung ausgehend vom Punkt P <u>grafisch</u> Pfeildarstellungen der Vektoren $\vec{a} - \vec{c}$ und $2 \cdot \vec{b} - \frac{1}{2} \cdot \vec{d}$!

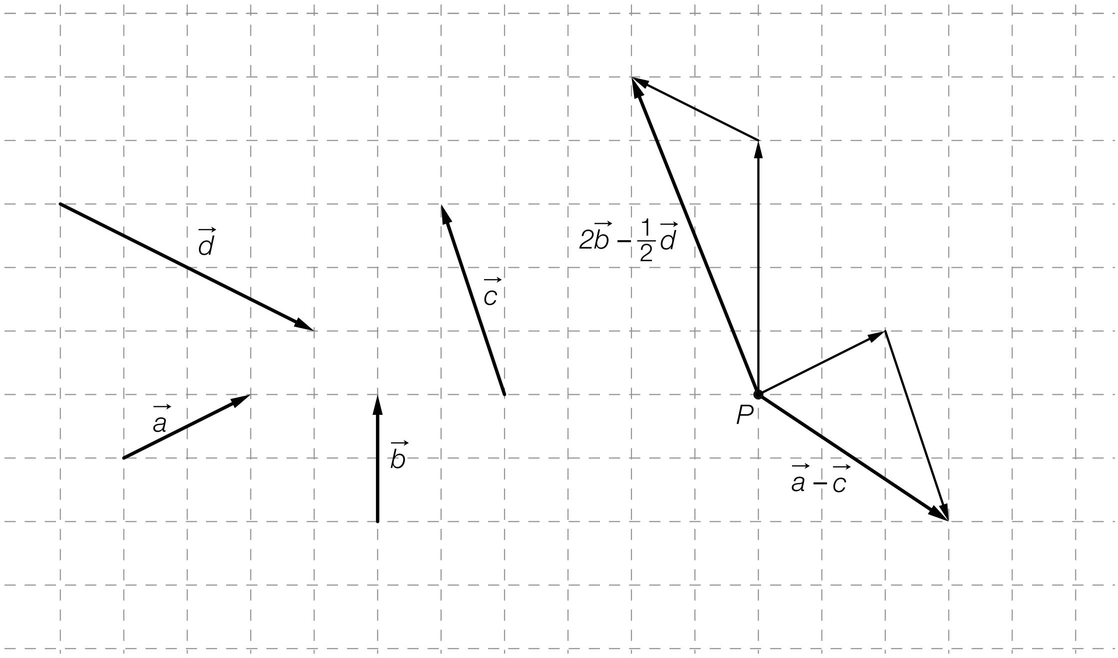
Leitfrage:

Begründen Sie anhand der gegebenen Pfeildarstellungen, warum es möglich ist, durch die Vektoraddition $r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{d}$ (mit $r, s \in \mathbb{R}$) den Vektor $\vec{c}$ zu erhalten, und bestimmen Sie rechnerisch die Werte der Parameter r und s!

Lösung zur Aufgabe 1

Vektoren

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:



Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn beide Lösungsvektoren korrekt ermittelt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Es ist möglich, weil die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{d}$ nicht parallel sind bzw. weil das entsprechende Gleichungssystem genau eine Lösung hat.

$$r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$r = 1{,}25$ und $s = -0{,}25$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Möglichkeit der Darstellung des Vektors $\vec{c}$ durch die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{d}$ (sinngemäß) richtig begründet wird und die Faktoren r und s richtig berechnet werden.

Aufgabe 2

Quadratische Gleichungen und Funktionen

Betrachtet werden eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ und eine quadratische Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 8x + 16 = 0$ und erklären Sie die Bedeutung dieser Lösungen für den Funktionsgraphen der Funktion f mit $f(x) = x^2 - 8x + 16$!

Leitfrage:

Erläutern Sie mithilfe von Skizzen, wie man bei Kenntnis des Graphen einer beliebigen quadratischen Funktion f auf die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung $f(x) = 0$ schließen kann!

Geben Sie an, welcher der Parameter a, b und c dafür verantwortlich ist, dass genau eine Lösung der quadratischen Gleichung den Wert 0 annimmt!
Geben Sie für diesen Fall den Wert des Parameters an und skizzieren Sie einen entsprechenden Funktionsgraphen!

Lösung zur Aufgabe 2

Quadratische Gleichungen und Funktionen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Lösungen: $x_1 = x_2 = 4$

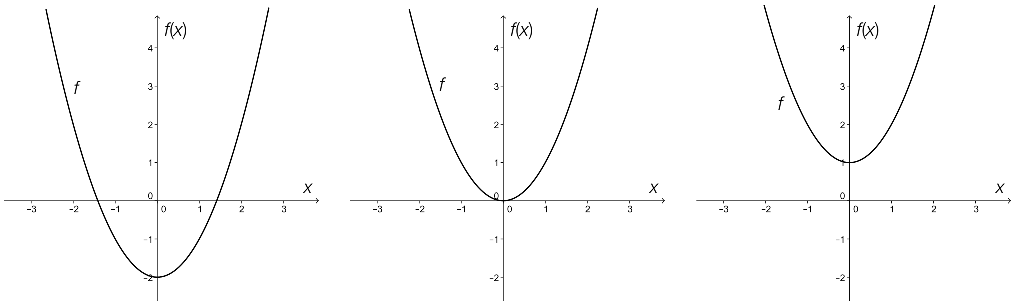
Das heißt, dass der entsprechende Funktionsgraph die x-Achse an der Stelle $x = 4$ berührt.
An dieser Stelle hat der Funktionsgraph eine Nullstelle, die zugleich der Scheitel der Parabel ist.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die Lösung richtig angegeben wird und ihre Bedeutung (sinngemäß) der Lösungserwartung entsprechend erklärt wird.

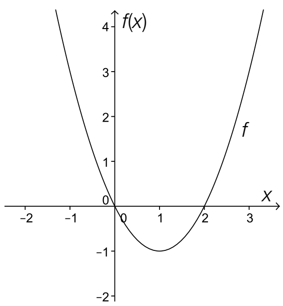
Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Anzahl der Schnittpunkte einer quadratischen Funktion mit der x-Achse entspricht genau der Anzahl der reellen Lösungen der dazugehörigen quadratischen Gleichung.



Die drei typischen Fälle:
- zwei Schnittpunkte: die quadratische Gleichung hat zwei verschiedene reelle Lösungen
- ein Berührpunkt: die quadratische Gleichung hat genau eine reelle (Doppel-)Lösung
- kein Schnittpunkt: die quadratische Gleichung hat keine reellen Lösungen

Aus $c = 0$ folgt jedenfalls, dass $x = 0$ eine Lösung der quadratischen Gleichung ist und der dazugehörige Funktionsgraph durch den Ursprung verläuft.



Lösungsschlüssel:

Ein Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Zusammenhang zwischen den Nullstellen des Graphen und der Anzahl der Lösungen (sinngemäß) richtig erläutert wird.
Weiters muss die Bedingung $c = 0$ genannt und ein entsprechender Graph richtig skizziert werden.

Aufgabe 3

Funktionen vergleichen

Gegeben sind vier reelle Funktionen f, g, h und i mit den nachstehenden Funktionsgleichungen:

$f(x) = 3x$ mit $x \in \mathbb{R}$

$g(x) = x^3$ mit $x \in \mathbb{R}$

$h(x) = 3^x$ mit $x \in \mathbb{R}$

$i(x) = \sin(3x)$ mit $x \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche dieser vier Funktionen im gesamten Definitionsbereich monoton steigend sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Leitfrage:

Skizzieren Sie jeweils in einem selbst angelegten Koordinatensystem (das nicht beschriftet oder skaliert sein muss) charakteristische Verläufe für die nachstehenden fünf Funktionstypen:

- lineare Funktion der Art $f(x) = k \cdot x + d$ mit $k \neq 0$
- Polynomfunktion zweiten Grades der Art $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $a \neq 0$
- Polynomfunktion dritten Grades der Art $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a \neq 0$
- Exponentialfunktion der Art $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$
- Sinusfunktion der Art $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$; $a, b \neq 0$

Geben Sie an, welche dieser Funktionstypen auf ihrem Definitionsbereich auf jeden Fall lokale Extremstellen haben, welche auf jeden Fall keine lokalen Extremstellen haben und welche eventuell lokale Extremstellen haben!

Lösung zur Aufgabe 3

Funktionen vergleichen

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

f, *g* und *h*

Die Begründung kann anhand entsprechender Skizzen erfolgen.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn genau diese drei Funktionen genannt und (sinngemäß) korrekte Begründungen angeführt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Kandidatinnen/Kandidaten sollen die Skizzen so zeichnen, dass die typischen Verläufe erkennbar sind.

- Lineare Funktion:
  Es muss eine Gerade sein, die weder senkrecht noch waagrecht sein darf.
- Polynomfunktion zweiten Grades:
  Der Graph muss als Parabel erkennbar sein.
- Polynomfunktion dritten Grades:
  Der charakteristische Verlauf des Graphen muss grundsätzlich erkennbar sein.
- Exponentialfunktion:
  Wichtig bei dieser Skizze ist hier die Darstellung der Monotonie, die Darstellung des asymptotischen Verhaltens und der sich ändernde Steigungsverlauf. Weiters darf die Funktion keine Nullstelle haben und der Graph der Funktion muss einen Schnittpunkt mit der senkrechten Achse aufweisen.
- Sinusfunktion:
  Die Periodizität sowie $\sin(0) = 0$ müssen eindeutig erkennbar sein.

Extremstellen:

- Auf jeden Fall keine lokalen Extremstellen haben:
  Exponentialfunktion, lineare Funktion (mit $k \neq 0$)
- Auf jeden Fall lokale Extremstellen haben:
  Polynomfunktion zweiten Grades, Sinusfunktion
- Eventuell lokale Extremstellen haben:
  Polynomfunktion dritten Grades

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn für alle fünf angeführten Funktionstypen ein typischer Funktionsverlauf richtig skizziert und die Frage nach den Extremstellen richtig beantwortet wird.

Aufgabe 4

Holzbestand

Der Holzbestand eines Waldes wird in Kubikmetern (m^3) angegeben. Zu Beginn eines bestimmten Jahres beträgt der Holzbestand 10 000 m^3. Jedes Jahr wächst der Holzbestand um 3 %. Am Jahresende werden jeweils 500 m^3 Holz geschlägert. Dabei gibt a_n die Holzmenge am Ende des n-ten Jahres an.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie die Entwicklung des Holzbestandes durch eine Differenzengleichung dar! Erläutern Sie die Bedeutung der auftretenden Größen!

Leitfrage:

Geben Sie an, bei welchen jährlichen prozentuellen Wachstumsraten der Holzbestand im Laufe der Zeit abnimmt, zunimmt bzw. konstant bleibt! Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung zur Aufgabe 4

Holzbestand

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

$a_0 = 10\,000$
$a_{n+1} = 1{,}03 \cdot a_n - 500$

a_0 ... Holzbestand zu Beginn
n ... Jahre nach Beginn
a_{n+1} ... Holzbestand am Ende des $(n + 1)$-ten Jahres

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn eine korrekte Differenzengleichung angegeben und die Bedeutung der auftretenden Größen (sinngemäß) korrekt erläutert wird.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

500 m^3 sind 5 % von 10000 m^3. Daher gilt:

Ist die jährliche prozentuelle Wachstumsrate gleich 5 %, so bleibt der Holzbestand konstant (weil der Zuwachs gleich der geschlägerten Holzmenge ist).

Ist die jährliche prozentuelle Wachstumsrate kleiner als 5 %, so nimmt der Holzbestand ab (weil der Zuwachs kleiner als die geschlägerte Holzmenge ist).

Ist die jährliche prozentuelle Wachstumsrate größer als 5 %, so nimmt der Holzbestand zu (weil der Zuwachs größer als die geschlägerte Holzmenge ist).

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn der Wert der Zuwachsrate von 5 % angegeben wird. Darüber hinaus müssen alle drei Fälle korrekt angesprochen und (sinngemäß) der Lösungserwartung entsprechend begründet werden.

Aufgabe 5

Schießstand

Ein Sportschütze schießt innerhalb einer Minute 20-mal auf eine Scheibe. Dabei trifft er bei den ersten 17 Schüssen 4-mal den innersten Ring der Zielscheibe.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie aufgrund dieser Daten einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit, dass unter der Annahme, dass sich die Voraussetzungen nicht ändern, der Sportschütze beim 18. Schuss wieder den innersten Ring der Zielscheibe trifft! Erklären Sie den von Ihnen gewählten Lösungsansatz!

Leitfrage:

Nehmen Sie an, dass der von Ihnen berechnete Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit, den innersten Ring der Zielscheibe zu treffen, auch für die nächste Serie von 20 Schüssen gilt.

Lösen Sie die folgende Aufgabe unter Verwendung der Binominalverteilung und begründen Sie, warum die Verwendung dieser Verteilung in diesem Fall gerechtfertigt ist!

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Sportschütze in der nächsten Serie insgesamt nicht öfter als 2-mal den innersten Ring der Zielscheibe trifft!

Lösung zur Aufgabe 5

Schießstand

Lösungserwartung zur Aufgabenstellung:

Der Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{4}{17} \approx 0{,}2353 = 23{,}53\ \%$.

Mögliche Erklärungen:
– die relative Häufigkeit entspricht dem gesuchten Schätzwert
– die Anzahl der günstigen Fälle geteilt durch die Anzahl der möglichen Fälle

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn der gesuchte Wert korrekt berechnet sowie eine der Lösungserwartung entsprechende Erklärung gegeben wird.

Toleranzintervall: [0,23; 0,24] bzw. [23 %; 24 %]

Lösungserwartung zur Leitfrage:

Die Annahme der Binominalverteilung ist gerechtfertigt, da es immer nur zwei Möglichkeiten gibt (den innersten Ring zu treffen oder nicht) und die Schüsse unabhängig voneinander sind, die Trefferwahrscheinlichkeit also annähernd konstant bleibt.

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$P(X = 0) = \left(\frac{13}{17}\right)^{20} \approx 0{,}0048$

$P(X = 1) = \binom{20}{1} \cdot \left(\frac{4}{17}\right)^{1} \cdot \left(\frac{13}{17}\right)^{19} \approx 0{,}0288$

$P(X = 2) = \binom{20}{2} \cdot \left(\frac{4}{17}\right)^{2} \cdot \left(\frac{13}{17}\right)^{18} \approx 0{,}0841$

$P(X \leq 2) \approx 0{,}1176$

Toleranzintervall: [0,108; 0,13] bzw. [10,8 %; 13 %]

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn (sinngemäß) korrekt argumentiert und die Wahrscheinlichkeit richtig berechnet wird.