Steinschleuder

Aufgabennummer: A_004

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Andy hat eine einfache Steinschleuder gebaut. Er schießt zur Überprüfung des Geräts einen Stein vertikal nach oben. Der Stein steigt zunächst und fällt dann wegen der Erdanziehung wieder hinab.

Die vom Stein erreichte Höhe h ist von der Zeit t abhängig. Wenn die Abschusshöhe 1,7 m beträgt, kann die Höhe näherungsweise durch die folgende Funktion beschrieben werden:

$$h(t) = -5t^2 + 15t + 1{,}7$$

$h(t)$ … Höhe zum Zeitpunkt t in Metern (m)
t … Zeitpunkt nach dem Abschuss in Sekunden (s)

a) Die Steigungen der Tangenten an den Graphen der Funktion h geben Auskunft über die momentanen Geschwindigkeiten des Steins zu den einzelnen Zeitpunkten t.

- Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h und die Tangente an den Graphen bei $t = 2$ s.
- Bestimmen Sie aus der Grafik ungefähr die Steigung der Tangente.

b) Die momentane Geschwindigkeit v berechnet man zu jedem Zeitpunkt t durch die 1. Ableitung der Funktion h.

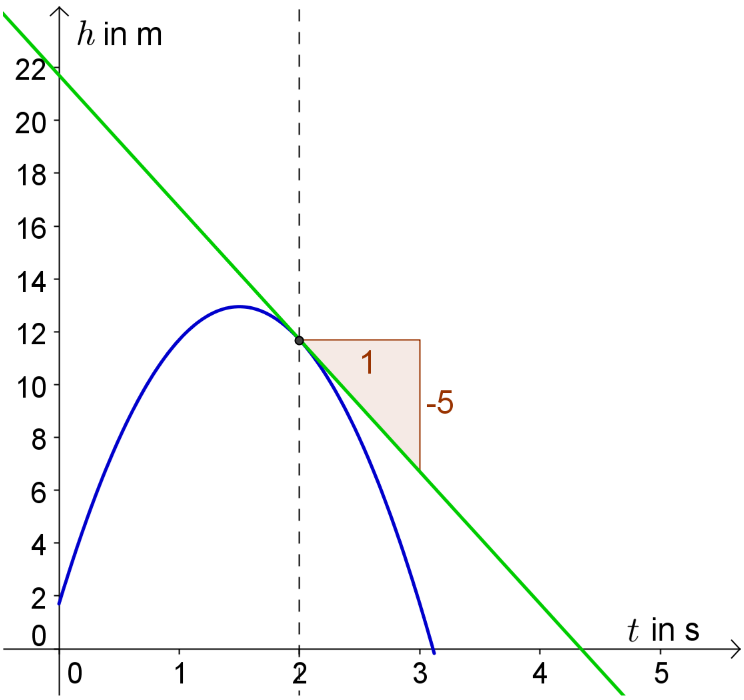
- Berechnen Sie mithilfe der 1. Ableitung, mit welcher Geschwindigkeit v (in m/s) der Stein auf dem Boden auftrifft.

c) – Erklären Sie, wie man mithilfe der 1. und der 2. Ableitung der Funktion h die maximale Höhe, die der Stein erreicht, berechnen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Die Tangente hat an der Stelle $t = 2$ s die Steigung -5. *(Ableseungenauigkeit ist zu tolerieren!)*

b) Der Stein trifft auf dem Boden auf, wenn $h(t) = 0$.
$h(t) = -5t^2 + 15t + 1{,}7 = 0 \;\rightarrow\;$ Technologieeinsatz $t = 3{,}109\ldots$ s

$h'(t) = -10t + 15$
$h'(3{,}109\ldots) \approx -16{,}09$
Die Geschwindigkeit beim Auftreffen auf dem Boden beträgt rund 16,09 m/s.

c) Mit $h'(t) = 0$ berechnet man den Zeitpunkt, an dem ein Extremwert von h erreicht wird. Durch Einsetzen in die Gleichung für $h(t)$ wird dieser Extremwert berechnet. Das kann im Allgemeinen ein Maximum oder ein Minimum sein.

Um bei einem berechneten Extremwert zwischen einem Minimum und einem Maximum zu unterscheiden, benötigt man die 2. Ableitung. Sie beschreibt das Krümmungsverhalten der Funktion. Bei einem lokalen Maximum liegt eine negative Krümmung vor. Wenn man daher den Zeitpunkt, zu dem das Extremum erreicht wird, in die 2. Ableitung einsetzt, dann erhält man im Falle eines Maximums eine negative Zahl.

(Wenn jemand mit Geschwindigkeit und Beschleunigung argumentiert, weil er Kenntnisse aus der Physik einbringen kann, so ist das ebenfalls gültig!)

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) –
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Physik

Quellen: –