# Aufgabe 3

## Funktionen vergleichen

Gegeben sind vier reelle Funktionen $f$, $g$, $h$ und $i$ mit den nachstehenden Funktionsgleichungen:

$f(x) = 3x$ mit $x \in \mathbb{R}$

$g(x) = x^3$ mit $x \in \mathbb{R}$

$h(x) = 3^x$ mit $x \in \mathbb{R}$

$i(x) = \sin(3x)$ mit $x \in \mathbb{R}$

### Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche dieser vier Funktionen im gesamten Definitionsbereich monoton steigend sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

### Leitfrage:

Skizzieren Sie jeweils in einem selbst angelegten Koordinatensystem (das nicht beschriftet oder skaliert sein muss) charakteristische Verläufe für die nachstehenden fünf Funktionstypen:

- lineare Funktion der Art $f(x) = k \cdot x + d$ mit $k \neq 0$
- Polynomfunktion zweiten Grades der Art $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $a \neq 0$
- Polynomfunktion dritten Grades der Art $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a \neq 0$
- Exponentialfunktion der Art $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$
- Sinusfunktion der Art $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$; $a, b \neq 0$

Geben Sie an, welche dieser Funktionstypen auf ihrem Definitionsbereich auf jeden Fall lokale Extremstellen haben, welche auf jeden Fall keine lokalen Extremstellen haben und welche eventuell lokale Extremstellen haben!

# Aufgabe 2

## Formel als Funktion interpretieren

Gegeben ist folgende Formel:

$F = \frac{5 \cdot a^2 \cdot b}{3}$ mit $F, a, b \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie sowohl

- $F$ in Abhängigkeit von $a$ bei konstantem $b$ mit $b < 0$

als auch

- $F$ in Abhängigkeit von $b$ bei konstantem $a$ mit $a \neq 0$

als Funktion und geben Sie jeweils an, um welchen Funktionstyp es sich dabei handelt!

Skizzieren Sie den Verlauf des jeweiligen Graphen!

Leitfrage:

Beschreiben Sie für die obigen zwei Funktionen die folgenden Eigenschaften:

- Monotonieverhalten
- Achsensymmetrie
- Achsenschnittpunkte

# Aufgabe 2

## Coulomb-Kraft

Zwischen zwei Ladungsmengen $q_1$ und $q_2$ (mit $q_1, q_2 > 0$), die sich im Abstand $r$ befinden, wirkt die Coulomb-Kraft $F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$, wobei $k$ eine positive Konstante ist.

Aufgabenstellung:

Begründen Sie, welche Auswirkungen es auf die Coulomb-Kraft $F$ hat, wenn die in der Formel auftretenden Größen folgendermaßen verändert werden!

a) Beide Ladungsmengen und der Abstand werden halbiert.

b) Eine Ladungsmenge und der Abstand werden verdoppelt, die zweite Ladungsmenge bleibt unverändert.

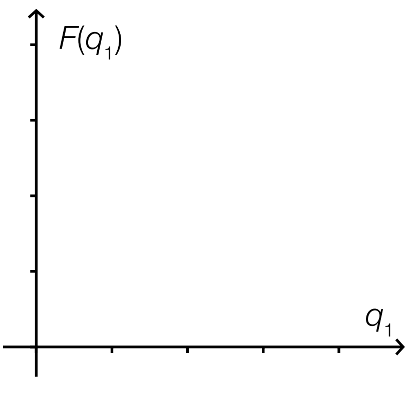
Leitfrage:

Skizzieren Sie in den nachstehenden Koordinatensystemen die Graphen folgender funktionaler Abhängigkeiten und erläutern Sie jeweils den Zusammenhang zwischen dem Verlauf des Graphen und den auftretenden Größen in der Funktionsgleichung!

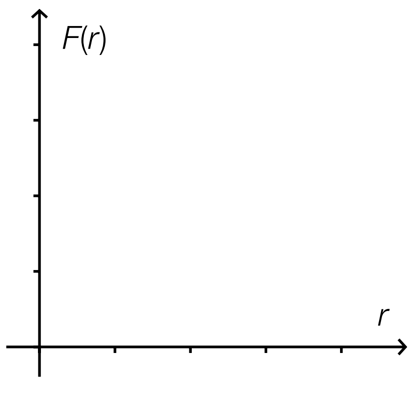
a) $F(q_1)$ bei konstantem $q_2$ und konstantem Abstand $r$

b) $F(r)$ bei konstanten Ladungsmengen

a)




b)



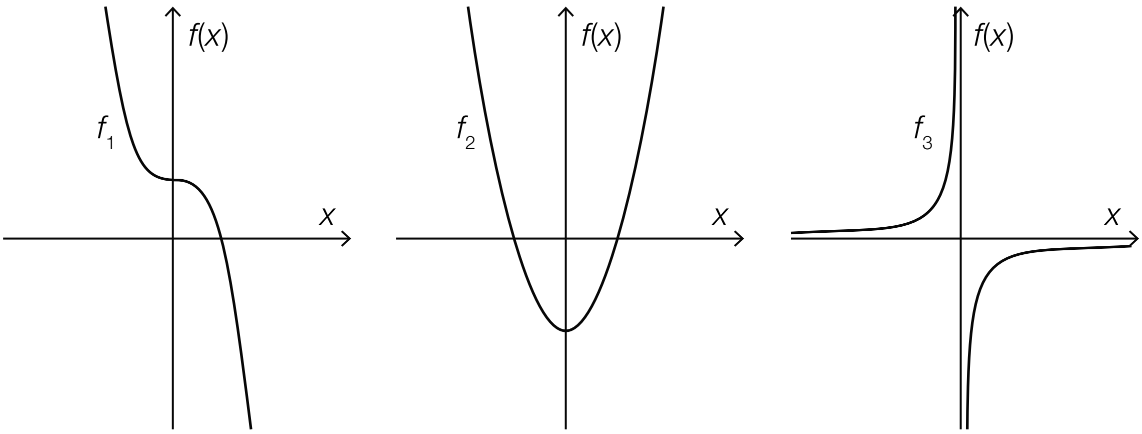
# Aufgabe 2

## Graphen von Potenzfunktionen

Gegeben sind drei Graphen von Potenzfunktionen mit $f(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie für jede der drei Funktionen $f_1$ bis $f_3$ einen möglichen Wert für den Exponenten $z$ an! Geben Sie für jede Funktion an, ob der Parameter $b$ negativ, positiv oder gleich null ist, und begründen Sie Ihre Antwort!




Leitfrage:

Geben Sie für Potenzfunktionen $f$ mit $f(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a > 0$ an, für welche Werte des Parameters $b$ und für welche Exponenten $z$ folgende Sonderfälle auftreten:

- $f$ beschreibt einen direkt proportionalen Zusammenhang.
- $f$ beschreibt einen indirekt proportionalen Zusammenhang.

Erklären Sie außerdem die Begriffe *direkte Proportionalität* und *indirekte Proportionalität*!

# Aufgabe 2

## Funktionsgleichung aufstellen

Eine Funktion $g$ hat die Eigenschaft, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$g(x + 1) = g(x) - 0{,}5$

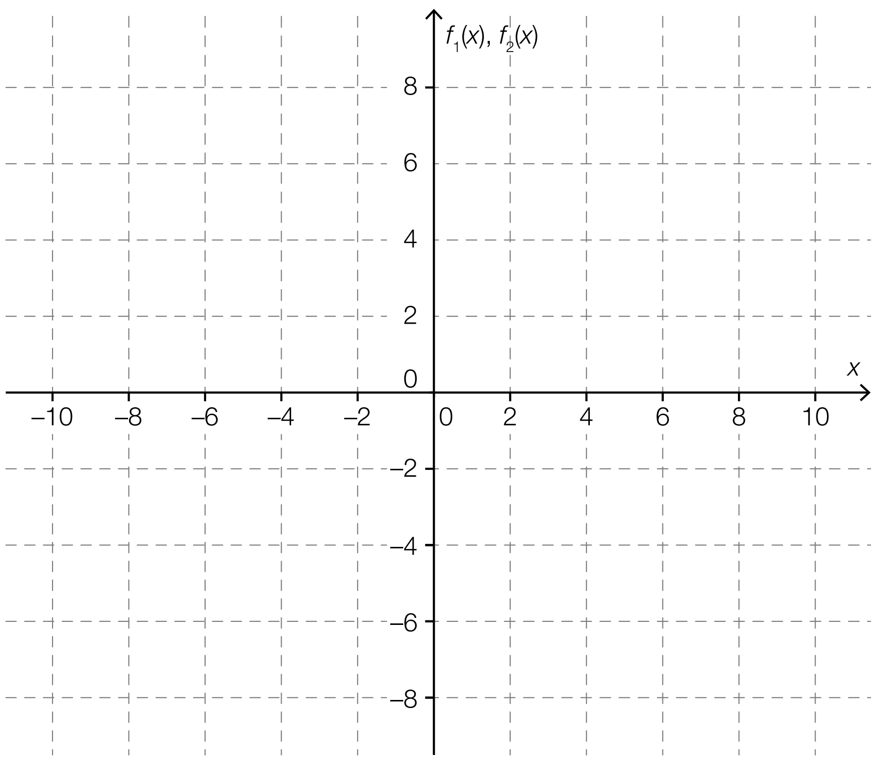
Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Funktionsgleichung einer Funktion $g$ an, die die gegebene Eigenschaft hat, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Gegeben sind zwei Funktionen $f_1$ und $f_2$ mit folgenden Eigenschaften:
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$f_1(x + 1) = f_1(x) + a$ und $f_2(x + 1) = f_2(x) \cdot a$ mit $a \in \mathbb{R}, a > 1$

Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem jeweils einen möglichen Verlauf der Graphen von $f_1$ und $f_2$!
Geben Sie für beide Funktionen an, welcher Funktionstyp jeweils vorliegt, und geben Sie an, wie sich das Monotonieverhalten der beiden Funktionen ändert, wenn man $a$ aus dem Intervall (0; 1) wählt!



# Aufgabe 2

## Formel

Gegeben ist die Formel $E = \frac{a \cdot b^2}{c} + d$ mit $a, b, d \in \mathbb{R}_0^+$ und $c \in \mathbb{R}^+$.

Diese Formel kann als Darstellung einer Funktion $E$ in Abhängigkeit von einer der Variablen $a$, $b$, $c$ oder $d$ interpretiert werden, sofern die anderen drei Variablen mit Werten belegt und somit konstant sind.

### Aufgabenstellung:

Bei der Funktion $E_d$ mit $d \mapsto \frac{a \cdot b^2}{c} + d$ handelt es sich um eine lineare Funktion. Geben Sie für diese lineare Funktion die Steigung des Graphen und seinen Schnittpunkt $S$ mit der senkrechten Achse an!

$k =$ ____________________________________________

$S = (\ \_\_\_\_\ |\ \_\_\_\_\ )$

### Leitfrage:

Für die Bearbeitung der nachstehenden Fragestellung gilt: $d = 0$.

$E_a$: $a \mapsto \frac{a \cdot b^2}{c}$

$E_b$: $b \mapsto \frac{a \cdot b^2}{c}$

$E_c$: $c \mapsto \frac{a \cdot b^2}{c}$

Geben Sie jeweils den Funktionstyp der reellen Funktionen $E_a$, $E_b$ und $E_c$ an und skizzieren Sie für jede dieser Funktionen einen möglichen Graphen!

# Aufgabe 2

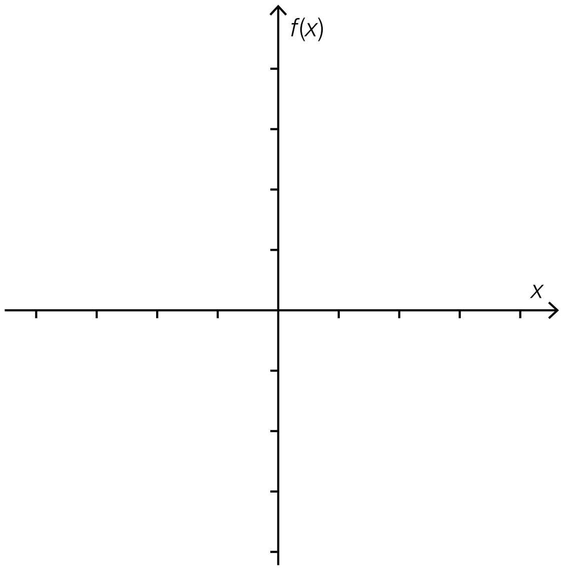
## Polynomfunktionen

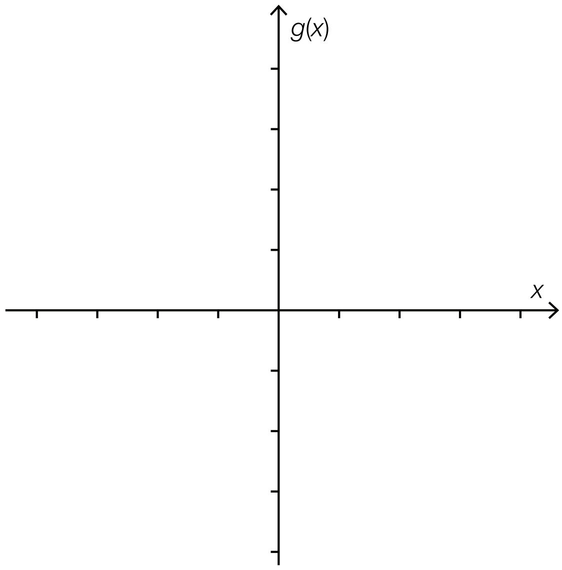
Für die Polynomfunktionen $f$ und $g$ gilt:

- $f$ hat genau zwei Nullstellen, genau drei lokale Extremstellen und genau zwei Wendestellen.
- $g$ hat genau eine Nullstelle, keine lokale Extremstelle und genau eine Wendestelle.

Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie in den nachstehenden Koordinatensystemen jeweils einen möglichen Graphen der Funktionen $f$ und $g$ so, dass die genannten Eigenschaften ersichtlich sind, und markieren Sie alle Wendepunkte!






Leitfrage:

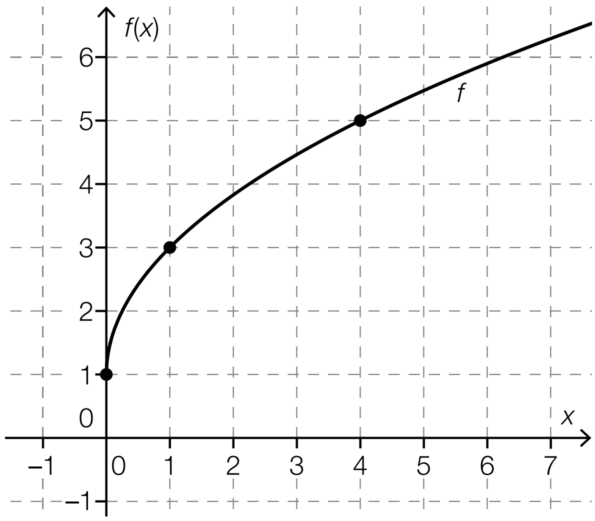
Geben Sie jeweils den kleinstmöglichen Grad $n_f$ bzw. $n_g$ der Polynomfunktionen $f$ und $g$ an, sodass die oben genannten Eigenschaften erfüllt sind, und begründen Sie Ihre Aussage!

Geben Sie an, ob die Funktion $g$ auch vom Grad $n_g + 1$ sein kann, und begründen Sie Ihre Aussage!

# Aufgabe 3

## Zwei Funktionen

Gegeben sind zwei Funktionen $f$ und $g$ mit $f(x) = a \cdot \sqrt{x} + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) und $g(x) = \frac{1}{2} \cdot x + d$ ($d \in \mathbb{R}$). Nachstehend ist der Graph von $f$ abgebildet. Die Koordinaten der hervorgehobenen Punkte sind ganzzahlig.




Aufgabenstellung:

Geben Sie die Werte der Parameter $a$ und $b$ an!

Leitfrage:

Es gibt eine Stelle $x_0$ mit $f'(x_0) = g'(x_0)$.
Ermitteln Sie diese Stelle $x_0$!

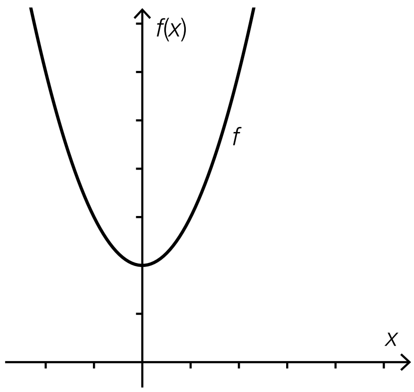
An dieser Stelle $x_0$ gilt weiters: $f(x_0) = g(x_0)$.
Geben Sie den Wert des Parameters $d$ der Funktion $g$ an und erläutern Sie, welche Aussage aufgrund der beiden für $x_0$ gegebenen Bedingungen über die Lagebeziehung zwischen den Graphen der Funktionen $f$ und $g$ getroffen werden kann!

# Aufgabe 2

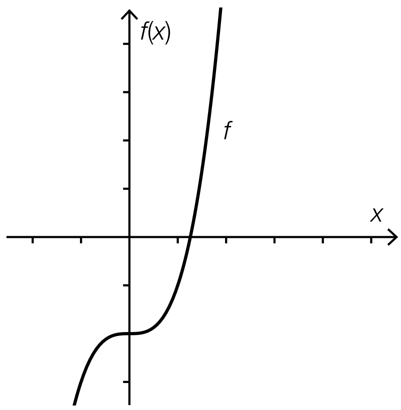
## Funktionen

Gegeben sind drei Graphen von Funktionen der Form $f(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $z \in \{1, 2, 3\}$.

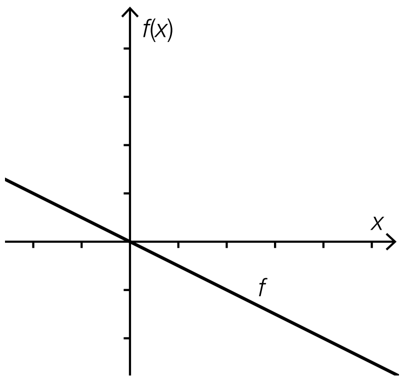
Graph 1:




Graph 2:




Graph 3:




Aufgabenstellung:

Geben Sie für jede Funktion anhand des Graphen an, welchen Wert $z$ hat und ob die Parameter $a$ und $b$ jeweils größer als null, kleiner als null oder gleich null sind!

Leitfrage:

Geben Sie für die Funktion, deren Darstellung der Graph 2 ist, eine Gleichung zur Berechnung der Nullstelle(n) in Abhängigkeit von den Parametern $a$ und $b$ an!

Geben Sie an, wie viele Nullstellen ein Graph dieses Funktionstyps hat, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Ermitteln Sie die Parameter $a$ und $b$ einer Funktion dieses Funktionstyps, deren Graph im Punkt $A = (1|-1)$ die Steigung 3 hat!

# Aufgabe 2

## Zentripetalkraft

Ein Körper mit der Masse $m > 0$ bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v > 0$ auf einer Kreisbahn mit dem Radius $r > 0$. Der Betrag der Kraft $F$, die dabei auf den Körper wirkt, kann durch folgende Gleichung beschrieben werden:

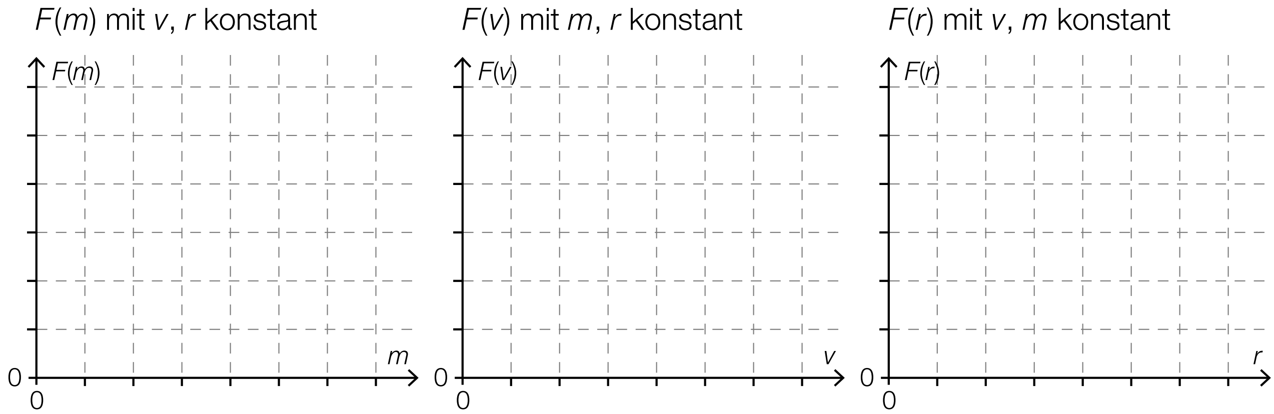
$$F = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Aufgabenstellung:

Geben Sie jeweils an, wie sich die Verdoppelung einer der Größen $m$, $v$ bzw. $r$ auf den Betrag der Kraft $F$ auswirkt, wenn die beiden anderen Größen konstant sind!

Leitfrage:

Stellen Sie mögliche Graphen der folgenden Funktionen jeweils in dem entsprechenden nachstehenden Koordinatensystem dar!



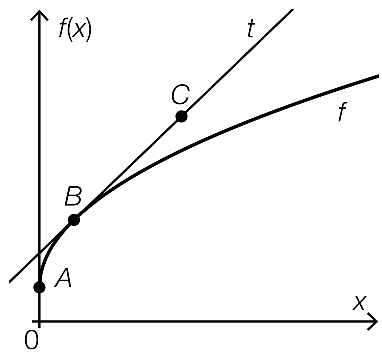

Geben Sie für jede der Funktionen an, wie $z$ jeweils zu wählen ist, damit die Graphen Darstellungen von Funktionen der Art $f(x) = a \cdot x^z + b$ sind!

# Aufgabe 3

## Wurzelfunktionen

Funktionen, deren Funktionsgleichungen die Form $f(x) = a \cdot \sqrt{x} + b$ $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ aufweisen, werden im Folgenden als Wurzelfunktionen bezeichnet.

Die nachstehende Abbildung veranschaulicht den Graphen einer Wurzelfunktion $f$ sowie die Tangente $t$ an den Funktionsgraphen im Punkt $B$. Diese Tangente verläuft durch den Punkt $C$. Der Punkt $A$ liegt auf der senkrechten Achse.




Aufgabenstellung:

Geben Sie für die Funktion $f$ an, ob $a$ und $b$ jeweils größer als null, kleiner als null oder gleich null sind, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

Leitfrage:

Bei einer bestimmten Skalierung der beiden Koordinatenachsen gilt: $B = (1|3)$ und $C = (4|6)$. Bestimmen Sie unter dieser Bedingung die zugehörigen Werte von $a$ und $b$ und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

# Aufgabe 2

## Funktionstypen

Gegeben ist eine Funktion in den drei Variablen $a$, $b$ und $c$ mit $a, c \in \mathbb{R}_0^+$ und $b \in \mathbb{R}^+$.
Es gilt: $f(a, b, c) = \frac{2 \cdot a}{b} + c^2$.

Aufgabenstellung:

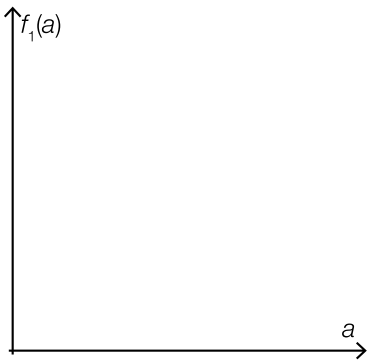
Die Funktionen $f_1$, $f_2$ und $f_3$, die aus $f(a, b, c)$ entstehen, wenn jeweils zwei der Variablen als konstant angenommen werden, sind wie folgt festgelegt:

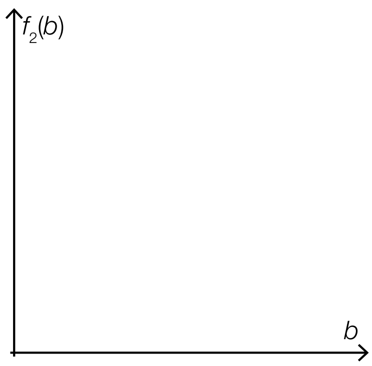
$f_1$: $a \mapsto f(a, b, c)$ für konstante Werte $b$ und $c$

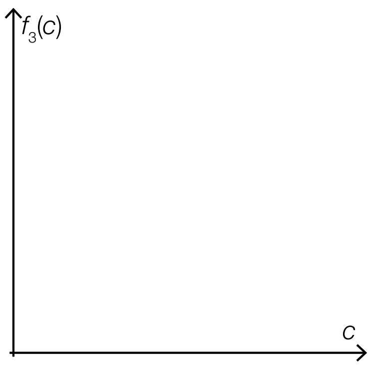
$f_2$: $b \mapsto f(a, b, c)$ für konstante Werte $a \neq 0$ und $c$

$f_3$: $c \mapsto f(a, b, c)$ für konstante Werte $a$ und $b$

Skizzieren Sie für jede der Funktionen $f_1$, $f_2$, $f_3$ einen Graphen und geben Sie jeweils den zugehörigen Funktionstyp an!








Leitfrage:

Geben Sie, sofern diese vorhanden sind, die Koordinaten der Schnittpunkte der oben skizzierten Graphen mit der senkrechten Achse in Abhängigkeit von den Parametern $a$, $b$ und $c$ an!

Geben Sie weiters an, welche der Funktionen $f_1$, $f_2$ und $f_3$ einen direkt proportionalen Zusammenhang beschreiben kann und welche Bedingung der (die) jeweilige(n) Parameter in diesem Fall erfüllen muss (müssen)!

# Aufgabe 3

## Zufluss und Abfluss

In einem Becken befinden sich 20 m$^3$ Wasser.

Zu einem Zeitpunkt $t = 0$ werden ein Zuflussrohr und ein Abflussrohr gleichzeitig geöffnet. Die Zuflussrate wird durch die Funktion $Z$ mit $Z(t) = 5 \cdot 5^{-0{,}25 \cdot t}$ und die Abflussrate durch die Funktion $A$ mit $A(t) = 0{,}4 \cdot \sqrt{t} + 0{,}2$ modelliert ($A(t)$ und $Z(t)$ in m$^3$/h, $t$ in Stunden).

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie den Schnittpunkt $S$ der Graphen der beiden Funktionen $Z$ und $A$, deuten Sie seine Koordinaten im gegebenen Kontext und erklären Sie seine Bedeutung im Hinblick auf die Wassermenge im Becken!

Leitfrage:

Der Zu- und Abfluss wird unterbrochen, wenn die Wassermenge im Becken unter 20 m$^3$ sinkt.

Geben Sie an, wie lange die beiden Rohre gleichzeitig geöffnet sind, bis der Zu- und Abfluss unterbrochen wird!

# Aufgabe 2

## Quader

Von einem Quader mit den Grundkanten $a$ und $b$ und der Höhe $h$ kennt man $a = 17{,}5$ cm und das Volumen $V = 3\,080$ cm$^3$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung derjenigen Funktion $b\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ an, die jeder Höhe $h$ die entsprechende Seitenlänge $b(h)$ zuordnet!

Leitfrage:

Geben Sie eine Gleichung derjenigen Funktion $O\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ an, die jeder Höhe $h$ die entsprechende Oberfläche $O(h)$ zuordnet!

Geben Sie die kleinstmögliche Oberfläche eines derartigen Quaders an!

# Aufgabe 2

## Proportionalitäten

Direkte und indirekte Proportionalitäten können durch Funktionen beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

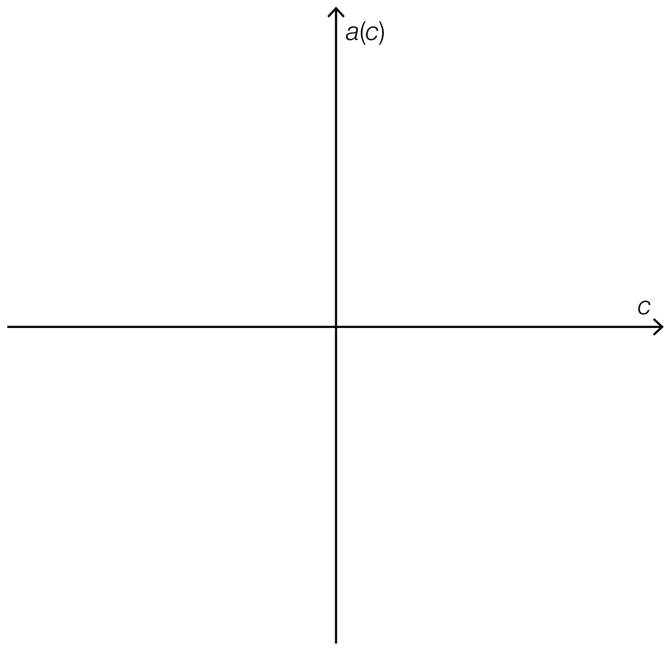
Der Graph einer Funktion $f$, die eine indirekte Proportionalität beschreibt, verläuft durch den Punkt $(4|3)$.

– Geben Sie eine Funktionsgleichung von $f$ an.

Leitfrage:

Gegeben ist die Funktion $a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $a(c) = \frac{b \cdot c}{d \cdot e}$ und den Konstanten $b, d, e \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

– Skizzieren Sie einen möglichen Graphen von $a$ und erläutern Sie für den Fall $b > 0$, welche Auswirkungen die Vorzeichen von $d$ bzw. $e$ auf den Verlauf des Graphen der Funktion $a$ haben.



# Aufgabe 2

## Umfang und Höhe eines gleichseitigen Dreiecks

Die Funktion $u$ beschreibt den Umfang eines gleichseitigen Dreiecks in Abhängigkeit von der Seitenlänge $x$. Dabei werden $x$ und $u(x)$ in cm angegeben.

Aufgabenstellung:

– Berechnen Sie den Wert von $\frac{u(5) - u(1)}{u(1)}$ und interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Kontext.

Leitfrage:

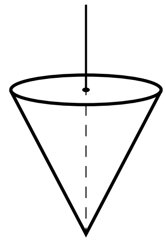
Die Funktion $h$ beschreibt die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks in Abhängigkeit vom Umfang $u$.

– Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung von $h$ und geben Sie den Funktionstyp dieser Funktion an.

$h(u) =$ ____________________________________________

# Aufgabe 2

## Wassertank



Ein kegelförmiger Wassertank hat ein Fassungsvermögen von 6 m$^3$.
Er ist so montiert, dass die Spitze des Kegels der tiefste Punkt ist
(siehe nebenstehende Skizze).

Der Tank wird mit einer konstanten Zuflussrate von $z$ (in m$^3$/h) bis zum Rand befüllt ($z > 0$).

Aufgabenstellung:

Die Funktion $d$ beschreibt die Dauer des Füllvorgangs (in h) in Abhängigkeit von der Zuflussrate $z$.

– Geben Sie eine Gleichung der Funktion $d$ an.

Leitfrage:

Der oben beschriebene Wassertank wird mit einer bestimmten Zuflussrate $z_1$ bis zum Rand befüllt.

Die Funktion $V$ mit $V(h) = 0{,}03 \cdot \pi \cdot h^3$ beschreibt das Volumen des im Tank befindlichen Wassers in Abhängigkeit von der Höhe $h$ des Wasserspiegels ($h$ in m, $V(h)$ in m$^3$).

Nach einer Stunde beträgt die Höhe $h$ des Wasserspiegels 2 m.

– Bestimmen Sie die Zuflussrate $z_1$ und die Dauer des Füllvorgangs.

# Aufgabe 2

## Allgemeine Gasgleichung

Die Gleichung $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ beschreibt modellhaft den Zusammenhang zwischen dem Druck $p$, dem Volumen $V$, der Stoffmenge $n$ und der absoluten Temperatur $T$ eines idealen Gases. Darin ist $R$ eine Konstante.

Aufgabenstellung:

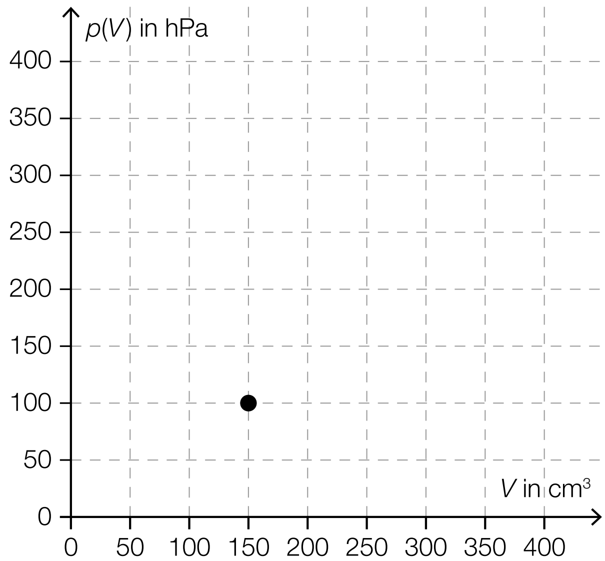
– Begründen Sie, warum die Abhängigkeit des Drucks $p$ von der Temperatur $T$ durch eine lineare Funktion der Form $p(T) = k \cdot T + d$ (mit $k, d \in \mathbb{R}$) modelliert werden kann, wenn die anderen Größen konstant sind.
– Geben Sie die Parameter $k$ und $d$ dieser linearen Funktion an.

Leitfrage:

Der Druck $p$ eines idealen Gases kann als Funktion des Volumens $V$ betrachtet werden, wenn die Größen $n$, $R$ und $T$ konstant sind.

– Ergänzen Sie die nachstehende Wertetabelle, stellen Sie den Graphen der Funktion $p$ im unten stehenden Koordinatensystem dar und geben Sie den Funktionstyp von $p$ an.

| $V$ in cm³ | 50 | 100 | 150 | 200 | 300 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(V)$ in hPa | | | 100 | | |



# Aufgabe 2

## Gravitationskraft

Zwei kugelförmige Körper mit den Massen $m_1$ und $m_2$, deren Schwerpunkte den Abstand $r$ haben, üben aufeinander eine Kraft $F$ aus ($m_1$ und $m_2$ in kg, $r$ in m, $F$ in Newton).

Es gilt: $F = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2}$

Dabei ist $G$ die Gravitationskonstante.

Aufgabenstellung:

– Geben Sie jeweils an, um welchen Funktionstyp es sich bei der Funktion $F_1: m_1 \mapsto F_1(m_1)$ sowie bei der Funktion $F_2: r \mapsto F_2(r)$ handelt, wenn die jeweils anderen Größen als konstant angenommen werden, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

Leitfrage:

– Überprüfen Sie, ob die Größen $F$ und $r$ bei konstantem $m_1$, $m_2$ indirekt proportional zueinander sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

– Geben Sie an, bei welchem Zusammenhang zwischen den beiden Größen $m_1$ und $m_2$ (mit $m_1, m_2 > 0$) die Kraft $F$ bei konstantem $r$ unabhängig von $m_1$ und $m_2$ konstant ist.