Aufgabe 4

Holzbestand

Der Holzbestand eines Waldes wird in Kubikmetern (m^3) angegeben. Zu Beginn eines bestimmten Jahres beträgt der Holzbestand 10 000 m^3. Jedes Jahr wächst der Holzbestand um 3 %. Am Jahresende werden jeweils 500 m^3 Holz geschlägert. Dabei gibt a_n die Holzmenge am Ende des n-ten Jahres an.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie die Entwicklung des Holzbestandes durch eine Differenzengleichung dar! Erläutern Sie die Bedeutung der auftretenden Größen!

Leitfrage:

Geben Sie an, bei welchen jährlichen prozentuellen Wachstumsraten der Holzbestand im Laufe der Zeit abnimmt, zunimmt bzw. konstant bleibt! Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4

Abbau eines Wirkstoffes

Die Entwicklung der Konzentration $c(t)$ (in mg/L) eines Arzneimittelwirkstoffes im Blut t Stunden nach der Einnahme kann durch die Gleichung $c(t + 1) - c(t) = -0{,}12 \cdot c(t)$ beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie die angeführte Differenzengleichung im gegebenen Kontext!

Leitfrage:

Die Wirkstoffkonzentration $d(t)$ eines anderen Wirkstoffes nimmt pro Stunde konstant um 15 mg/L ab.

Geben Sie eine Differenzengleichung an, die diese Entwicklung der Wirkstoffkonzentration d beschreibt!

Geben Sie an, welche Funktionstypen jeweils zur Beschreibung der Entwicklung der Wirkstoffkonzentrationen c und d herangezogen werden können, und begründen Sie Ihre Entscheidungen!

Aufgabe 2

Kapitalentwicklung

Ein Kapital K wird mit einem jährlichen Zinssatz von 0,2 % verzinst. Im Folgenden wird angenommen, dass sämtliche Steuern und eventuell anfallende Gebühren bereits berücksichtigt sind.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie die Bedeutung der beiden nachstehenden Terme im gegebenen Kontext!

$K \cdot 0{,}002$

$K \cdot 1{,}002^5 - K$

Leitfrage:

Eine Großmutter zahlt für ihre Enkeltochter zu Beginn eines jeden Jahres jeweils € 500 auf ein Sparkonto ein, das mit einem jährlichen Zinssatz von 0,2 % verzinst wird.

Berechnen Sie den Kontostand zu Beginn des dritten Jahres (direkt nach der dritten Einzahlung).

Jemand behauptet, dass der Kontostand nach n Jahren durch eine Funktionsgleichung der Form $K(n) = a \cdot b^n$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ darstellbar ist.

Geben Sie an, ob die Behauptung zutreffend ist oder nicht, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Aufgabe 4

Sparkonto

Am 15. Geburtstag eines Kindes beginnend werden in Jahresabständen jeweils 1.000 Euro auf ein Sparkonto eingezahlt.

Es wird ein konstanter jährlicher Zinssatz von 1 % vereinbart.

Aufgabenstellung:

Geben Sie den Zusammenhang zwischen den Kontoständen K_{t+1} und K_t zweier aufeinanderfolgender Jahre mithilfe einer Gleichung an (t in Jahren, K_t in Euro)!

Leitfrage:

Ermitteln Sie den Endbetrag E auf dem Sparkonto nach der Einzahlung am 18. Geburtstag des Kindes!

Anstelle der jährlichen Einzahlung soll nun ein Betrag K_0 einmalig am 15. Geburtstag des Kindes eingezahlt werden.
Geben Sie an, wie groß K_0 (bei gleichbleibendem jährlichem Zinssatz von 1 %) sein muss, damit am 18. Geburtstag des Kindes der gleiche Endbetrag E zur Verfügung steht!

Aufgabe 3

Naturpark

Die Anzahl N_t einer bestimmten Tierart in einem Naturpark wird jährlich ermittelt.

Zu Beginn der Erhebungen werden $N_0 = 180$ Tiere gezählt, ein Jahr später werden $N_1 = 207$ Tiere gezählt. Es wird angenommen, dass die maximale Anzahl der Tiere dieser Tierart im Naturpark eine Kapazitätsgrenze K nicht übersteigen kann.

Aufgabenstellung:

Das Wachstum der Tierpopulation kann mithilfe der Differenzengleichung
$N_{t+1} = N_t + 0{,}0003 \cdot N_t \cdot (K - N_t)$ modelliert werden.

– Ermitteln Sie die Kapazitätsgrenze K für diese Tierart.

Leitfrage:

Die Anzahl der Tiere kann auch durch eine Funktion N in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.
Dabei gilt: $N(t) = \dfrac{K}{1 + \left(\dfrac{K}{N_0} - 1\right) \cdot e^{-\lambda \cdot K \cdot t}}$
$N(t)$ ... Anzahl der Tiere zum Zeitpunkt t mit t in Jahren
N_0 ... Anzahl der Tiere zum Zeitpunkt $t = 0$
λ ... Wachstumskonstante ($\lambda \in \mathbb{R}^+$)

– Ermitteln Sie den Wert der Wachstumskonstante λ.
– Geben Sie (mithilfe der Funktionsgleichung von N) eine Gleichung an, mit der man berechnen kann, nach wie vielen Jahren die Anzahl der Tiere nur mehr 10 % unter der Kapazitätsgrenze liegt.

Aufgabe 2

Farbpulver

Gibt man 500 g Farbpulver in einen Krug mit Wasser, dann sind nach einer Minute 70 g dieses Pulvers aufgelöst.

Die aufgelöste Menge an Farbpulver wird durch die Funktion p mit $p(t) = 500 - 500 \cdot e^{k \cdot t}$ in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert (t in min, $p(t)$ in g).

Aufgabenstellung:

– Ermitteln Sie den Wert von k.

Leitfrage:

Die Funktion p erfüllt die Differenzengleichung $p(t + 1) - p(t) = a \cdot (500 - p(t))$ mit $a \in \mathbb{R}$.

– Berechnen Sie den Wert von a und deuten Sie diesen im gegebenen Kontext.

Aufgabe 2

Grippe

Am Morgen des 17. Februar waren in einer bestimmten Stadt 2000 Personen an Grippe erkrankt, am Morgen des 28. Februar waren es 4000. Modellhaft wird angenommen, dass im Februar die Anzahl der an Grippe erkrankten Personen jeden Tag um den gleichen Prozentsatz gestiegen ist.

Aufgabenstellung:

– Geben Sie diesen Prozentsatz an.

Leitfrage:

Für den Monat März wird die weitere Entwicklung der Anzahl der an Grippe erkrankten Personen in dieser Stadt modellhaft durch eine Differenzengleichung beschrieben.
Dabei ist A_t die Anzahl der erkrankten Personen t Tage nach dem 1. März (erhoben am Morgen des jeweiligen Tages). In diesem Modell wird angenommen, dass täglich 4 % der Erkrankten jeweils eine gesunde Person anstecken, aber auch täglich 180 Personen wieder gesunden.

– Geben Sie die Differenzengleichung an.

$A_{t+1} - A_t =$ ____
A_0 … Anzahl der erkrankten Personen am 1. März

Die Anzahl der an Grippe erkrankten Personen kann bei dieser Modellierung ständig zunehmen, stabil bleiben oder ständig abnehmen.

– Geben Sie an, welchen Wert A_0 nicht übersteigen darf, damit die Anzahl der an Grippe erkrankten Personen im März nicht ständig zunimmt.

Aufgabe 3

Teuerungsrate

Die statistisch gemessene Teuerungsrate stellt einen Maßstab für die allgemeine Preisentwicklung in Österreich dar.
Die Teuerungsrate zwischen Jänner 2017 und Jänner 2018 lag für den Bereich *Wohnen/Energie* bei 2,3 %.

Aufgabenstellung:

Eine Familie gab im Jänner 2018 für den Bereich *Wohnen/Energie* 500 Euro aus.

– Geben Sie unter Verwendung der angeführten Teuerungsrate an, welchem Betrag diese 500 Euro im Jänner 2017 entsprochen hätten.

Leitfrage:

Die Entwicklung der jährlichen Ausgaben x_n einer Familie für den Bereich *Wohnen/Energie* kann (unter Annahme eines konstanten Jahresverbrauchs sowie einer konstanten Teuerungsrate) modellhaft für einen bestimmten Zeitraum durch eine Differenzengleichung der Form $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$ beschrieben werden (n in Jahren, $a, b \in \mathbb{R}$).

– Ermitteln Sie die Werte von a und b, wenn für den Bereich *Wohnen/Energie* eine Teuerungsrate von 2 % angenommen wird.

– Beschreiben Sie, wie sich die jährlichen Ausgaben der Familie für den Bereich *Wohnen/Energie* entwickeln, wenn $a = 1$ und $b = 50$ gilt.