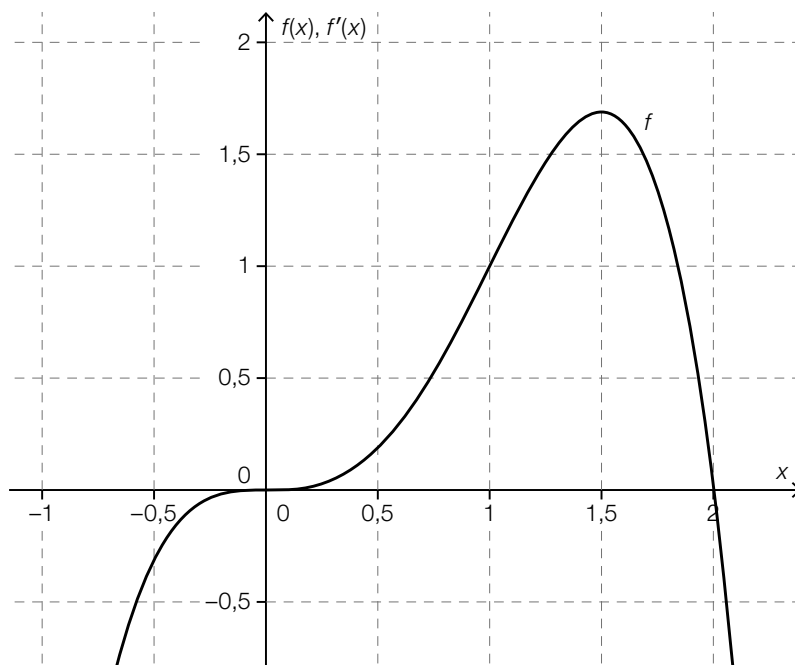


Aufgabe 4

Polynomfunktion

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Polynomfunktion f dargestellt.



Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Ableitungsfunktion f' von f ! Achten Sie dabei besonders darauf, die Nullstellen von f' korrekt einzuzichnen und das Monotonieverhalten von f' korrekt darzustellen!

Leitfrage:

Begründen Sie, warum die Polynomfunktion f mindestens vom Grad 4 sein muss!

Eine Funktionsgleichung der Polynomfunktion f vom Grad 4 lautet allgemein:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad \text{mit } a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

Begründen Sie, warum für die in der Abbildung dargestellte Polynomfunktion $c = d = e = 0$ gilt!

Aufgabe 4

Funktionseigenschaften – Krümmung

Gegeben ist eine allgemeine Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$).

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, in welchem Intervall der Graph der Funktion f mit den Parametern $a = 1$, $b = -6$, $c = 0$ und $d = 1$ linksgekrümmt ist! Erklären Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Ermitteln Sie die zweite Ableitung der allgemeinen Polynomfunktion f und lösen Sie dann die beiden folgenden Teilaufgaben!

Begründen Sie, warum die Krümmung des Graphen von f nicht von den Parametern c und d abhängt!

Begründen Sie, warum der Graph der Funktion f immer zwei verschiedene Krümmungsbereiche aufweist!

Aufgabe 4

Polynomfunktion vierten Grades

Für eine Funktionsgleichung einer Polynomfunktion f vierten Grades mit $f(x) = a \cdot x^4 + x^2 + c$ gilt: $a > 0$ und $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie für $a = 1$ die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f an der Stelle $x = 2$ und erklären Sie, warum die Angabe des Wertes c für die Bearbeitung dieser Aufgabe nicht erforderlich ist!

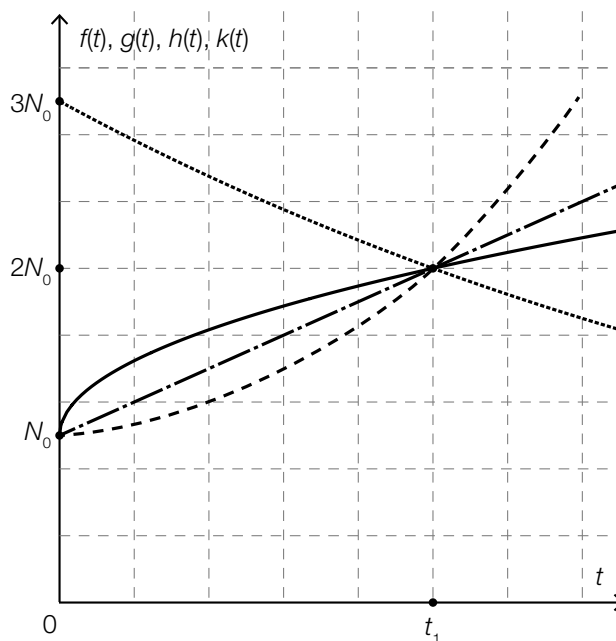
Leitfrage:

Geben Sie eine Gleichung an, mit deren Hilfe man für alle $a > 0$ die Wendestellen berechnen kann, und schließen Sie anhand dieser Gleichung auf die Anzahl der Wendestellen der Funktion f !

Aufgabe 4

Funktionsgraphen

Nachstehend sind die Graphen von vier Funktionen f , g , h und k dargestellt.



Aufgabenstellung:

Für die vier Funktionen f , g , h und k gelten für alle $t \in (0; t_1)$ folgende Aussagen:

- $f''(t) = 0$ und $f'(t) > 0$
- $g''(t) > 0$ und $g'(t) > 0$
- $h''(t) < 0$ und $h'(t) > 0$
- $k''(t) > 0$ und $k'(t) < 0$

Beschriften Sie in der obigen Abbildung die Graphen korrekt mit f , g , h und k und begründen Sie Ihre Entscheidungen!

Leitfrage:

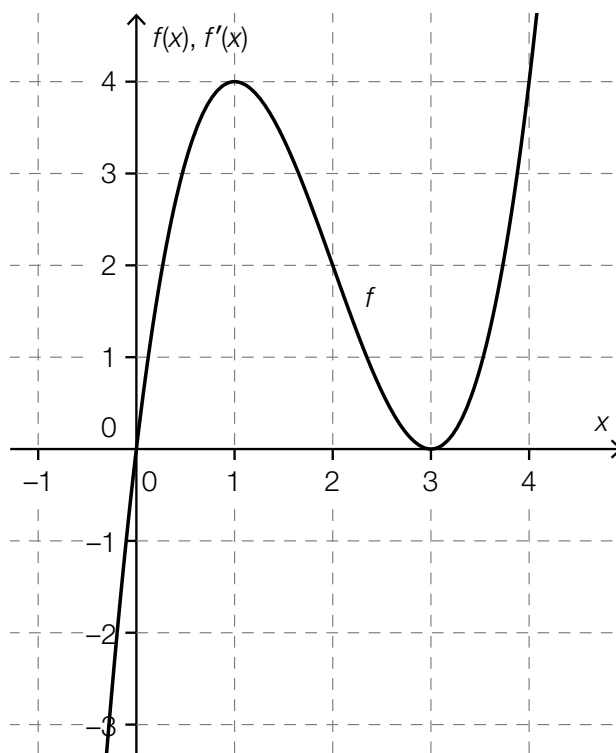
Ermitteln Sie unter Verwendung von N_0 und t_1 die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von t und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Geben Sie an, ob für die Funktion f die Aussage „Die Verdoppelungszeit ist konstant“ richtig oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Aufgabe 3

Ableitungsfunktion

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Polynomfunktion f dritten Grades dargestellt.



Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' im gegebenen Koordinatensystem und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise!

Leitfrage:

Die abgebildete Polynomfunktion f ist die Ableitungsfunktion einer Polynomfunktion F .

Nachstehend sind fünf Aussagen über die Polynomfunktion F angeführt.

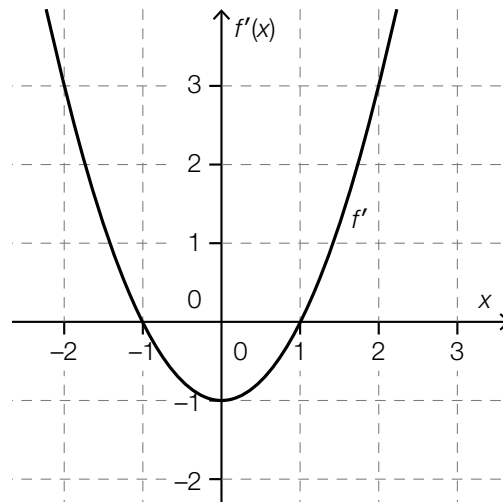
- Aussage 1: Die Funktion F ist eine Polynomfunktion vom Grad 3.
- Aussage 2: Die Funktion F ist für positive x -Werte (streng) monoton steigend.
- Aussage 3: Die Funktion F hat an der Stelle $x = 0$ eine Minimumstelle.
- Aussage 4: Die Funktion F hat an der Stelle $x = 3$ eine Wendestelle.
- Aussage 5: Die Funktion F ist für alle $x > 3$ rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt).

Geben Sie für jede der angeführten Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

Aufgabe 3

Ableitungsfunktion

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f' zweiten Grades. Die Funktion f' ist die Ableitungsfunktion einer Funktion f .



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Wendestelle der Funktion f und erläutern Sie das Krümmungsverhalten von f !

Leitfrage:

Die erste Ableitungsfunktion f' einer Polynomfunktion f ist durch die Gleichung $f'(x) = x^2 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gegeben.

Beschreiben Sie die Abhängigkeit der Anzahl der (lokalen) Extremstellen der Polynomfunktion f vom Wert des Parameters c und begründen Sie Ihre Aussagen!

Aufgabe 3

Graph einer Polynomfunktion

Eine Polynomfunktion f erfüllt die nachstehend angeführten Bedingungen.

$$f'(-2) < 0$$

$$f'(2) > 0$$

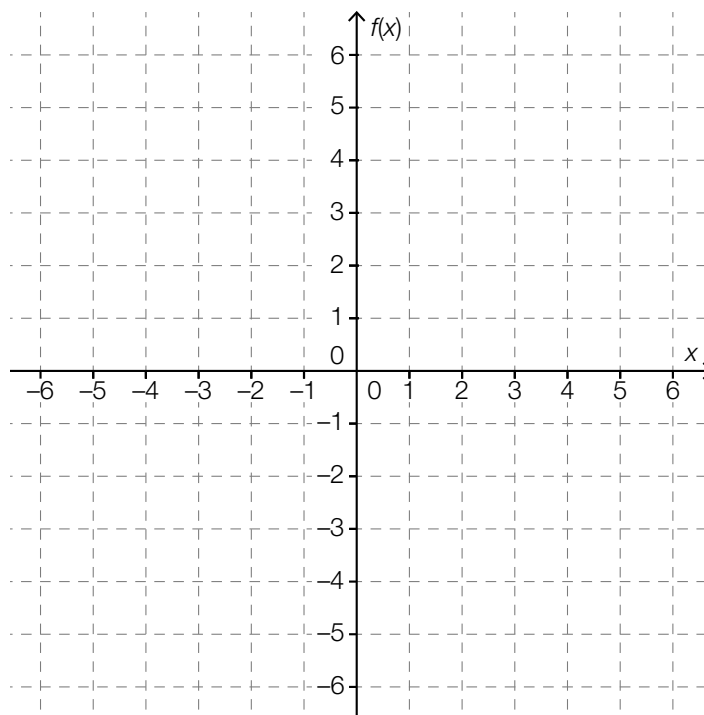
$$f'''(2) = 0$$

$$f(4) = 4$$

$$f'(4) = 0$$

Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem einen möglichen Graphen einer solchen Funktion f mit kleinstmöglichem Grad!



Leitfrage:

Eine Funktion g soll – zusätzlich zu den für f gegebenen Bedingungen – auch $g'''(4) = 0$ erfüllen.

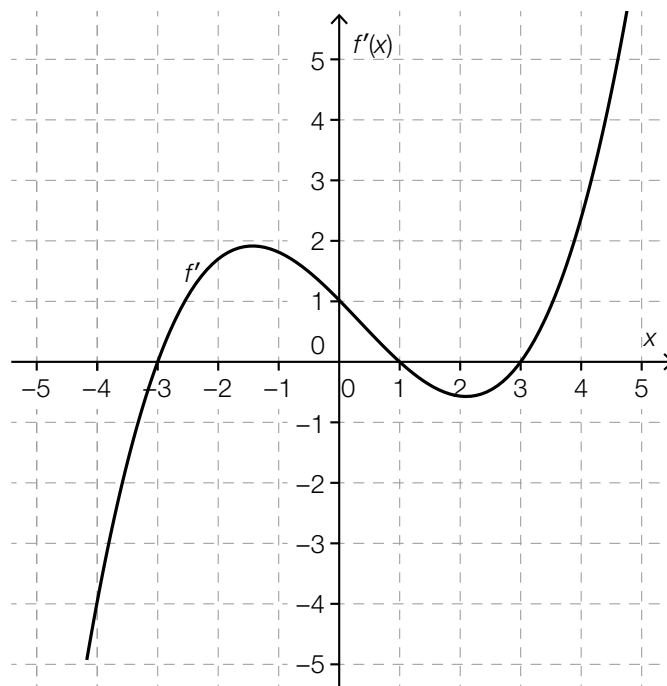
Begründen Sie, warum der Grad von g mindestens um 1 höher als der Grad von f sein muss!

Erläutern Sie, wie sich das Monotonieverhalten der Funktion g von jenem der Funktion f unterscheidet, wenn der Grad von g um genau 1 höher als jener von f ist!

Aufgabe 4

Funktionseigenschaften

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer Polynomfunktion f vierten Grades.



Aufgabenstellung:

Geben Sie zu jeder der drei nachstehenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

Aussage 1: Die Funktion f hat im Intervall $(-4; 4)$ genau zwei lokale Extremstellen.

Aussage 2: Die Funktion f ist im Intervall $(0; 2)$ streng monoton fallend.

Aussage 3: Die Funktion f ist im Intervall $(-1; 1)$ rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt).

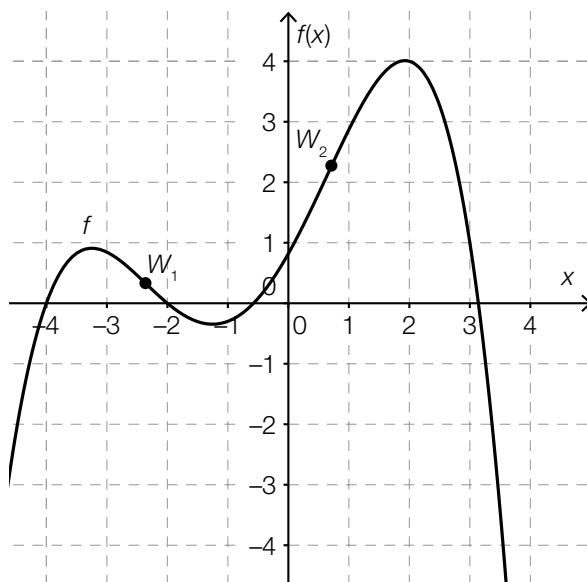
Leitfrage:

Skizzieren Sie in der gegebenen Abbildung einen möglichen Graphen von f und erklären Sie den Zusammenhang zwischen den Verläufen der Graphen von f' und f !

Aufgabe 4

Ableitungs- und Stammfunktionen

Die nachstehende Abbildung zeigt den Ausschnitt eines Graphen einer Polynomfunktion f vierten Grades mit den Wendepunkten W_1 und W_2 .



Aufgabenstellung:

Geben Sie zu jeder der nachstehenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

Aussage 1: Für alle $x \in [-1; 1]$ gilt: $f'(x) > 0$.

Aussage 2: Es gibt ein $x \in [0; 1]$ mit $f'(x) = 0$.

Aussage 3: Für alle $x \in [-4; -2]$ gilt: $f''(x) < 0$.

Aussage 4: Es gibt ein $x \in [1; 3]$ mit $f''(x) = 0$.

Leitfrage:

Geben Sie an, in welchen Teilintervallen von $[-4; 3]$ eine Stammfunktion von f streng monoton steigend ist, und erläutern Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4

Wendepunkt

Gegeben ist eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Gleichung $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + x + 3$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Die Funktion f hat bei $x = 1$ eine Wendestelle.

Aufgabenstellung:

Beschreiben Sie die Beziehung zwischen den Parametern a und b mit einer Gleichung!

Leitfrage:

Die Geschwindigkeit eines Körpers im Intervall $[0; 2]$ kann mithilfe dieser Funktion f modelliert werden. Dabei ist x die Zeit in s und $f(x)$ die Geschwindigkeit in m/s.

Erläutern Sie die Bedeutung der Wendestelle in diesem Kontext!

Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b so, dass der vom Körper im Intervall $[0; 2]$ zurückgelegte Weg 12 m beträgt!

Aufgabe 4

Höhe einer Pflanze (Löwenzahn)

Die Höhe eines Löwenzahns (in cm) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Wochen) wird für einen Zeitraum von 15 Wochen näherungsweise durch eine Polynomfunktion p mit $p(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ beschrieben.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Löwenzahn 1 cm hoch. Seine Wachstumsgeschwindigkeit beträgt zu diesem Zeitpunkt 0,4 cm pro Woche.

Seine maximale Wachstumsgeschwindigkeit erreicht der Löwenzahn nach 7 Wochen.

Am Ende des Beobachtungszeitraums wird eine Höhe des Löwenzahns von 19 cm gemessen.

Aufgabenstellung:

Geben Sie ein entsprechendes Gleichungssystem zur Berechnung der Werte a , b , c und d an!

Leitfrage:

Über einen längeren Zeitraum stellt die Funktion h mit $h(t) = \frac{20}{1 + 19 \cdot e^{k \cdot t}}$ eine realistischere Modellierung der Höhe des Löwenzahns dar.

Im Zeitintervall $[0; 12]$ wächst der Löwenzahn durchschnittlich um 1,4 cm pro Woche.

Bestimmen Sie den Wert von k !

Aufgabe 4

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades

Für eine Polynomfunktion f dritten Grades mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ gelten die folgenden Bedingungen:

$$f(-2) = 1$$

$$f'(-2) = 0$$

$$f''(-2) = 3$$

Aufgabenstellung:

- Geben Sie an, welcher charakteristische Punkt (Hochpunkt, Tiefpunkt oder Wendepunkt) des Graphen von f durch die angeführten Bedingungen festgelegt ist.
- Geben Sie weiters seine Koordinaten an und begründen Sie, warum genau eine weitere Stelle x_1 existieren muss, für die die Bedingung $f'(x_1) = 0$ gilt.

Leitfrage:

- Geben Sie eine Funktionsgleichung von f an, wenn $d = 0$ ist, und begründen Sie, warum genau eine Stelle x_2 existiert, für die die Bedingung $f''(x_2) = 0$ gilt.

Aufgabe 3

Extremstellen bei Polynomfunktionen vierten Grades

Eine Polynomfunktion f vierten Grades hat die Gleichung $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ mit $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Aufgabenstellung:

– Begründen Sie, warum f höchstens 3 Extremstellen haben kann.

Leitfrage:

Es gilt: $g(x) = p \cdot x^4 + q \cdot x^2 + r$ mit $p, q, r \in \mathbb{R}$ und $p > 0$.

- Geben Sie jede Anzahl an lokalen Extremstellen an, die g haben kann.
- Zeigen Sie rechnerisch, wie das Vorzeichen von q die Anzahl an Extremstellen beeinflusst, und skizzieren Sie für jeden dieser Fälle einen typischen Verlauf des Graphen.

Aufgabe 3

Polynomfunktion

Gegeben ist die Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^3 + c \cdot x$ mit den Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Aufgabenstellung:

- Geben Sie an, wie viele Extremstellen und wie viele Wendestellen die Funktion f maximal haben kann, und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

Leitfrage:

- Bestimmen Sie die Wendestellen in Abhängigkeit von den Parametern.
- Argumentieren Sie, warum es für $b \neq 0$ auf jeden Fall mindestens eine Wendestelle gibt, und geben Sie an, in welchem Fall es mehr als eine Wendestelle gibt.

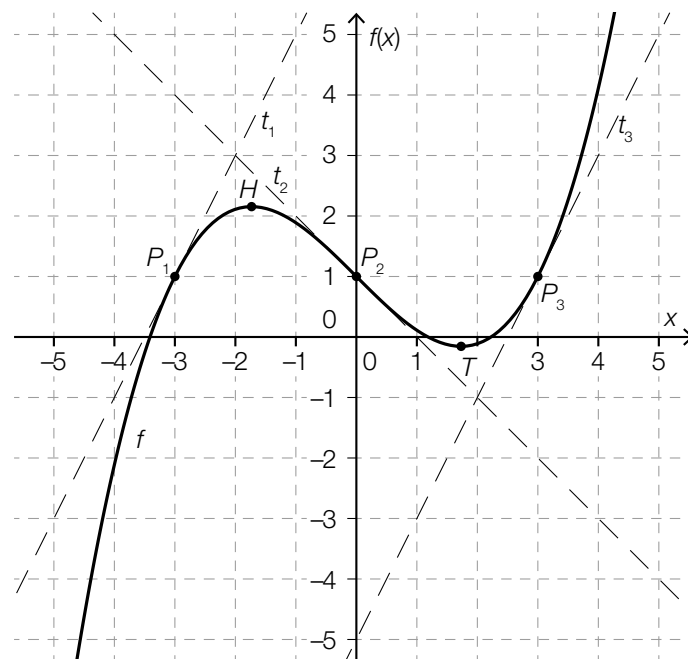
Aufgabe 1

Tangenten

Die unten stehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f vom Grad 3 mit dem Hochpunkt H und dem Tiefpunkt T .

Die Geraden t_1 , t_2 und t_3 sind Tangenten an den Graphen von f in den Punkten P_1 , P_2 und P_3 .

Die Koordinaten der Punkte P_1 , P_2 und P_3 sowie der Anstieg der jeweils zugehörigen Tangente sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

- Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden t_3 an.

Leitfrage:

- Erläutern Sie, welche Informationen die abgebildeten Tangenten in P_1 , P_2 und P_3 sowie die Punkte H und T für den Graphen von f' liefern.
- Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen von f' ein.

Aufgabe 3

Ableitungsfunktion und Tangente

Die zweite Ableitung f'' einer Polynomfunktion f ist $f''(x) = 3 \cdot x - 6$.

Dabei ist t_W mit $t_W(x) = k \cdot x + 2$ und $k \in \mathbb{R}$ die Tangente an den Graphen von f im Wendepunkt $W = (x_W | -6)$.

Aufgabenstellung:

- Berechnen Sie k .

Leitfrage:

- Geben Sie eine Gleichung von f an und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

Aufgabe 4

Zweite Ableitung

Die zweite Ableitung einer Funktion f ist durch $f''(x) = 9 \cdot x - 1$ gegeben.

Aufgabenstellung:

- Geben Sie die Wendestelle von f an und erläutern Sie mithilfe von f'' das Krümmungsverhalten des Graphen von f .

Leitfrage:

Für die Funktion f gilt:

- f hat an der Stelle $x = 1$ eine Nullstelle.
- $f(-1) = 2$

- Geben Sie eine Gleichung der Funktion f an.